FORMULARIO TÉRMICO (TRANSMISIÓN DE CALOR)

Formulario de termodinámica (modelos de sustancias, energía, entropía, exergía, cambio de fase, mezclas...)

Transmisión de calor 1
  Conducción 1
    Soluciones unidimensionales estacionarias: 2
    Soluciones unidimensionales no-estacionarias 2
    Transmisión de calor en aletas y varillas 3
    Simulación numérica 3
  Radiación 4
    Espectro electromagnético y efectos térmicos 4
    Radiación de cuerpo negro: 4
    Propiedades termo-ópticas 4
    Calor por radiación IR entre superficies en el vacío. Factores geométricos 4
  Convección 6
    Ecuaciones generales del movimiento de fluidos. Números adimensionales 6
    Capa límite 6
    Convección forzada 7
    Convección natural 7
    Cambiadores de calor 8

Transmisión de calor

Calor y flujo de calor: $Q \equiv \Delta E - W$, $\dot{Q} \equiv \left.\frac{dE}{dt}\right|_{W=0} = \left.\frac{dH}{dt}\right|_{p} \equiv KA\Delta T = G\Delta T = \Delta T / R = A\Delta T / M$, $\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = K\Delta T$

Modos de transmisión: $$\vec{q} = K\Delta T \begin{cases} \text{conducción} \quad \vec{q} \equiv -k\nabla T \quad (\text{unidimensional}: \dot{q} = -k\frac{\partial T}{\partial x}) \\ \text{convección} \quad \dot{q} \equiv h(T - T_\infty) \quad \left(\text{e.g. conv. nat. en aire: } h \sim 10 \text{ W/(m}^2\cdot\text{K)}\right) \\ \text{radiación} \quad \dot{q} = \varepsilon\sigma\left(T^4 - T_0^4\right) \quad \left(\varepsilon < 1,\ \sigma = 5{,}67\times 10^{-8} \text{ W/(m}^2\cdot\text{K}^4)\right) \end{cases}$$

Conducción

Ecuación del calor: $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T + \phi$ o $\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T + \frac{\phi}{\rho c}$ con $a \equiv \frac{k}{\rho c}$. Caso plano: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\phi}{k} = 0$

Datos de k. Ley de Lorentz (para cuando la conducción está dominada por los electrones): $k = \frac{\pi^3}{3}\left(\frac{k_B}{e}\right)^2 T\sigma_{electr}$

Ecuación del calor con fuentes internas y convección: $\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T + \frac{\phi}{\rho c} - \nabla\cdot\left(T\vec{v}\right)$

SOLUCIONES UNIDIMENSIONALES ESTACIONARIAS:

-Plana: $T(x)=Ax+B-\frac{\phi}{2k}x^2$, $\dot{Q}_{12}\overset{\phi=0}{=}k_{12}A\frac{T_1-T_2}{L_{12}}$, $T_0\overset{T_1=T_2=T_s}{=}T_s+\frac{\phi L^2}{4k}$ (T-central en pared simétrica)

-Cilíndrica: $T(r)=A\ln r+B-\frac{\phi}{4k}r^2$, $\dot{Q}_{12}\overset{\phi=0}{=}k_{12}2\pi L\frac{T_1-T_2}{\ln\frac{R_1}{R_2}}$, $T_0=T_s+\frac{\phi R^2}{4k}$ (en el eje)

-Esférica: $T(r)=\frac{A}{r}+B-\frac{\phi}{6k}r^2$, $\dot{Q}_{12}\overset{\phi=0}{=}k_{12}4\pi\frac{T_1-T_2}{\frac{R_1-R_2}{R_1R_2}}$, $T_0=T_s+\frac{\phi R^2}{6k}$ (en el centro)

Conducción de calor unidimensional estacionaria a través de una pared plana compuesta:

$$\dot{q}=K\Delta T=\frac{\Delta T}{R}=k_{12}\frac{T_2-T_1}{L_{12}}=k_{23}\frac{T_3-T_2}{L_{23}}=...=\frac{T_n-T_1}{\sum\frac{L_i}{k_i}}\quad\Rightarrow\quad K=\frac{1}{\sum\frac{L_i}{k_i}},\quad R=\sum R_i=\sum\frac{L_i}{k_i}$$

Espesor crítico de aislamiento cilíndrico (para que sea mínimo el calor): $\Delta R=R_2-R_1=\frac{k}{h}-R_1$ (si ΔR>0)

Espesor crítico de aislamiento esférico (para que sea mínimo el calor): $\Delta R=R_2-R_1=\frac{2k}{h}-R_1$ (si ΔR>0)

Fuente superficial cilíndrica en R_1 con T_2 en R_2: $T\left(r>R_1\right)=T_2+\phi\frac{r}{k}\ln\frac{R_2}{r}$

Fuente superficial esférica en R_1 con T_2 en R_2: $T\left(r>R_1\right)=T_2+\phi\frac{r^2}{k}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)$

SOLUCIONES UNIDIMENSIONALES NO-ESTACIONARIAS

Deposición de energía en el instante t=0 en el punto r=0. Caso plano (n=0), cilíndrico (n=1) o esférico (n=2):

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n\frac{\partial T}{\partial r}\right)-\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}=0\xrightarrow{\eta(r,t)\equiv\frac{r}{\sqrt{4at}}}\frac{\mathrm{d}^2T(\eta)}{\mathrm{d}\eta^2}+\left(2\eta+\frac{n}{\eta}\right)\frac{\mathrm{d}T(\eta)}{\mathrm{d}\eta}=0\quad\to\quad T(r,t)=\frac{Q\exp\left(\frac{-r^2}{4at}\right)}{\rho c\left(4\pi at\right)^{\frac{1+n}{2}}}$$

Parámetros adimensionales usados en conducción de calor: número de Fourier $Fo\equiv\frac{at}{L^2}$, número de $Bi\equiv\frac{hL}{k}$

Calentamiento/enfriamiento por convección con un sólido muy conductor ($Bi\to0$):

$$\dot{Q}=\frac{dH}{dt}=KA\Delta T\longrightarrow mc\frac{dT}{dt}=-hA\left(T-T_\infty\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}=\exp\left(-\frac{hA}{mc}t\right)=\exp\left(-Bi\,Fo\right)$$

Tiempo de relajación por conducción ($Bi\to\infty$): $\Delta t\approx\frac{\Delta H}{\dot{Q}}\approx\frac{mc\Delta T}{KA\Delta T}\approx\frac{mc\Delta T}{kA\frac{\Delta T}{L}}\approx\frac{\rho L^3c}{kL^2\frac{1}{L}}=\frac{\rho cL^2}{k}=\frac{L^2}{a}$

Tiempo de relajación por convección ($Bi\to0$): $\Delta t\approx\frac{\Delta H}{\dot{Q}}\approx\frac{mc\Delta T}{KA\Delta T}\approx\frac{mc}{hA}\approx\frac{\rho L^3c}{hL^2}=\frac{\rho cL}{h}$

Salto de temperatura superficial en sól. semi-inf.: $\frac{T-T_0}{T_\infty-T_0}=\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$, $\dot{q}=-k\frac{\left(T_\infty-T_0\right)}{\sqrt{\pi at}}\exp\left(\frac{-x^2}{4at}\right)$

Salto de flujo de calor superficial en sól. semi-inf.: : $T-T_0=q_0\left[\frac{2\sqrt{at/\pi}}{k}\exp\left(\frac{-x^2}{4at}\right)-\frac{x}{k}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)\right]$

Variación periódica de temp. superf. en sól. semi-inf.: $\dfrac{T-T_{\text{mean}}}{T_{\max}-T_{\text{mean}}}=\exp\left(\dfrac{-x}{\sqrt{a\tau/\pi}}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi t}{\tau}-\dfrac{x}{\sqrt{a\tau/\pi}}\right)$

Para sólidos finitos pueden usarse los gráficos de Heisler (o soluciones numéricas).

Probl. de Stefan: $\dfrac{\dot{Q}}{A}=h_a\left(T_a-T_0\right)=k\dfrac{T_0-T_w}{x}=\rho h_{SL}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, $z=\dfrac{-k}{h}+\sqrt{\left(\dfrac{k}{h}\right)^2+\dfrac{2k\left(T_w-T_a\right)}{\rho h_{SL}}t}$, $T_0=\dfrac{\dfrac{k}{zh}T_f+T_a}{1+\dfrac{k}{zh}}$

TRANSMISIÓN DE CALOR EN ALETAS Y VARILLAS

$$\left(\rho A\mathrm{d}x\right)c\frac{\partial T}{\partial t}=\dot{q}\left(x+\mathrm{d}x\right)A\left(x+\mathrm{d}x\right)-\dot{q}\left(x\right)A\left(x\right)+\dot{q}_w\left(x\right)A_w\left(x\right)+\phi\left(x\right)A\left(x\right)\mathrm{d}x$$

que para una aleta casi-unidimensional aislada y en régimen estacionario: $\dfrac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{\mathrm{d}\ln A}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\phi}{k}=0$

que para aleta unidim. plana en régimen estacion. y ϕ=0: $\dfrac{d^2T}{dx^2}-\left(T-T_\infty\right)\dfrac{hp}{kA}=0$, $T-T_\infty=A\mathrm{e}^{mx}+B\mathrm{e}^{-mx}$

y despreciando la transmisión en un extremo: $\dfrac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}=\dfrac{\cosh\left[m\left(L-x\right)\right]}{\cosh\left(mL\right)}$ y $\dot{Q}_0=\sqrt{hpkA}\left(T_\infty-T_0\right)\tanh\left(mL\right)$

SIMULACIÓN NUMÉRICA

$T^{approx}\left(\vec{x},t\right)=T^{IBC}\left(\vec{x},t\right)+\sum_{i=1}^{N}T_i(t)\phi_i(\vec{x})$, con funciones conocidas ($T^{IBC}\left(\vec{x},t\right)$ y $\phi_i(\vec{x})$) y coeficientes a determinar ($T_i(t)$), por ajuste con la ecuación del calor o con el balance energético.

Diferencias finitas: $mc\dfrac{\Delta \mathrm{T}}{\Delta t}=\dot{Q}_{\text{net}}$,

1D (genérico): $\rho \mathrm{A}\Delta x\, c\dfrac{\mathrm{T}_i^{j+1}-\mathrm{T}_i^j}{\Delta t}=k\mathrm{A}\dfrac{\mathrm{T}_{i+1}^j-\mathrm{T}_i^j}{\Delta x}-k\mathrm{A}\dfrac{\mathrm{T}_i^j-\mathrm{T}_{i-1}^j}{\Delta x}+\phi\mathrm{A}\Delta x-h_{lat}p\Delta x\left(\mathrm{T}_i^j-T_\infty\right)$

1D (0): $\mathrm{T}_0^{j+1}=\mathrm{T}_0^j+2Fo\left(\mathrm{T}_1^j-\mathrm{T}_0^j\right)+\dfrac{\phi\Delta t}{\rho c}-\dfrac{p\Delta t}{\rho cA}\left[h_{lat}\left(\mathrm{T}_0^j-T_\infty\right)+\varepsilon_{lat}\sigma\left(\mathrm{T}_0^{4j}-T_\infty^4\right)\right]+$
$+\dfrac{2\Delta t}{\rho c\Delta x}\left[E_0-h_0\left(\mathrm{T}_0^j-T_\infty\right)-\varepsilon_0\sigma\left(\mathrm{T}_0^{4j}-T_\infty^4\right)\right]$

1D (i): $\mathrm{T}_i^{j+1}=\mathrm{T}_i^j+Fo\left(\mathrm{T}_{i+1}^j-2\mathrm{T}_i^j+\mathrm{T}_{i-1}^j\right)+\dfrac{\phi\Delta t}{\rho c}-\dfrac{p\Delta t}{\rho cA}\left[h_{lat}\left(\mathrm{T}_i^j-T_\infty\right)+\varepsilon_{lat}\sigma\left(\mathrm{T}_i^{4j}-T_\infty^4\right)\right]$

1D (N): $\mathrm{T}_N^{j+1}=\mathrm{T}_N^j+2Fo\left(\mathrm{T}_N^j-\mathrm{T}_{N-1}^j\right)+\dfrac{\phi\Delta t}{\rho c}-\dfrac{p\Delta t}{\rho cA}\left[h_{lat}\left(\mathrm{T}_N^j-T_\infty\right)+\varepsilon_{lat}\sigma\left(\mathrm{T}_0^{4j}-T_\infty^4\right)\right]+$
$+\dfrac{2\Delta t}{\rho c\Delta x}\left[E_N-h_N\left(\mathrm{T}_N^j-T_\infty\right)-\varepsilon_N\sigma\left(\mathrm{T}_N^{4j}-T_\infty^4\right)\right]$

Radiación

Radiación de energía (electromagnética, acústica…) o de partículas (electrones, protones, neutrones…).

ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO Y EFECTOS TÉRMICOS

λ [m]: $\gamma < 10^{-10} < X < 10^{-8} < UV < 0.4\cdot10^{-6} < VIS < 0.7\cdot10^{-6} < IRc < 3\cdot10^{-6} < IRl < 10^{-3} < MW < 10^{-2} < RW$

Propagación rectilínea direccional en el vacío a velocidad c=300·10^6 m/s.

Vibración transversal, $E=h\nu$ con h=6.6·10^{-34} J·s; $c=\lambda\nu$. (k=1.38·10^{-23} J/K)

Interacción materia-radiación: emisión, absorción, transmisión, reflexión.

Radiación térmica es la debida al estado térmico (emitida en el movimiento microscópico en el equilibrio), aunque se puede emitir la misma radiación por procesos no térmicos (e.g. emisión estimulada, luminiscencia).

Radiación solar (media extraterrestre), E=1360 W/m^2 (10% UV, 40% visible). A nivel del mar, sin nubes, subsolar, unos 900 W/m^2 directa más unos 90 W/m^2 difusa.

RADIACIÓN DE CUERPO NEGRO:

Cavidad opaca, al vacío, en equilibrio materia-radiación: $U(T)=\sum N_\nu h\nu=\text{cte}$ con $S(U)$=máx, requiere $N_\nu(\nu)$:

$$\frac{\mathrm{d}N_\nu}{V}=\frac{8\pi\nu^2\mathrm{d}\nu}{c^3\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1\right]}$$ (estadística Bose-Einstein), o bien $\mathrm{d}u_\lambda=(\mathrm{d}N_\nu/V)h\nu$ y $u(T)=\int_0^\infty h\nu\frac{\mathrm{d}N_\nu}{V}=\frac{8\pi^5k^4}{15c^2h^3}T^4$.

Emitancia (potencia por unidad de área), $M\equiv\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}A$: Planck, $M_{\mathrm{bb},\lambda}=\dfrac{A}{\lambda^5\left[\exp\left(\frac{B}{\lambda T}\right)-1\right]}$ (93% in $\lambda_m/2<l<4\lambda_m$).

Corolarios: Ley de Stefan-Boltzmann, $M_{\mathrm{bb}}=\int_0^\infty M_{\mathrm{bb},\lambda}\mathrm{d}\lambda=\sigma T^4$; Ley de Wien, $\lambda|_{M_{\max}}=\dfrac{C}{T}$,

con $\sigma=\dfrac{15\pi}{AB^4}=5{,}67\cdot10^{-8}\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2\cdot K^4}}$, $A=2\pi hc^2$=3,7·10^{-16} W·m^2, $B=hc/k$=0,014 m·K, C=0,0029 m·K.

Intensidad (potencia por unidad de ángulo sólido), $I\equiv\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}\Omega$, con $\mathrm{d}\Omega\equiv\mathrm{d}A/r^2=\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ (θ es la colatitud).

Radiancia (potencia por unidad de área normal y ángulo sólido), $L\equiv\mathrm{d}^2\Phi/(\mathrm{d}A_\perp\mathrm{d}\Omega)$. Superficies difusas: $M=\pi L$.

PROPIEDADES TERMO-ÓPTICAS

Radiancia (potencia por unidad de área normal y ángulo sólido), $L\equiv\mathrm{d}^2\Phi/(\mathrm{d}A_\perp\mathrm{d}\Omega)$. Superficies difusas: $M=\pi L$.

Emisividad, $\varepsilon_{\lambda,T,\Omega}\equiv L_{\lambda,T,\Omega}/L_{\mathrm{bb},\lambda,T}$.

Irradiancia (potencia incidente por unidad de área), $E\equiv\int_{2\pi}L\cos\theta\mathrm{d}\Omega$.

Absortancia (o absortividad), $\alpha_{\lambda,T,\Omega}\equiv L_{\lambda,T,\Omega,\mathrm{abs}}/L_{\lambda,T,\Omega,\mathrm{inc}}$.

Ley de Kirchhoff: $\varepsilon_{\lambda,T,\Omega}=\alpha_{\lambda,T,\Omega}$ (reversibilidad del equilibrio detallado), pero en general $\varepsilon\neq\alpha$.

Transmisión y reflexión. En una interfase, $\alpha+\rho+\tau=1$ (balance energético). Por isotropía: $\rho_{\lambda,T,\Omega,\Omega'}=\rho_{\lambda,T,\Omega',\Omega}$.

Exitancia (potencia por unidad de área que sale por emisión o por reflexión), $M=\varepsilon M_{\mathrm{bb}}+\rho E$ (antes radiosidad).

Superficies con emisión difusa, con reflexión difusa, con reflexión especular, con retrorreflexión.

Superficie grises si $\varepsilon\neq\varepsilon(\lambda)<1$.

CALOR POR RADIACIÓN IR ENTRE SUPERFICIES EN EL VACÍO. FACTORES GEOMÉTRICOS

Entre superficies isotermas, difusas y grises, se define el factor de visión, F_{12}, como la fracción de la energía que sale de la superficie A_1 (por emisión o por reflexión), que incide sobre la superficie A_2 (se absorba o no).

$$\mathrm{d}F_{12}\equiv\frac{\mathrm{d}^2\Phi_{12}}{M_1\mathrm{d}A_1}=\frac{L_1\mathrm{d}A_1\cos\theta_1\mathrm{d}\Omega_{12}}{M_1\mathrm{d}A_1}=\frac{\cos\theta_1}{\pi}\mathrm{d}\Omega_{12}=\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2}{\pi r_{12}^2}\mathrm{d}A_2\quad\to\quad F_{12}=\frac{1}{\pi A_1}\int_{A_2}\int_{A_1}\frac{\cos\beta_1\cos\beta_2}{r_{12}^2}dA_1dA_2$$

Tabla de factores de visión. Álgebra de los factores de visión:

$$0 \le F_{12} \le 1,\ \sum_j F_{1j} = 1,\ A_1F_{12} = A_2F_{21},\ F_{1,2+3} = F_{12} + F_{13},\ F_{1+2,3} = \frac{A_1F_{13} + A_2F_{23}}{A_1 + A_2}$$

Para calcular el calor que recibe el nodo i por radiación, $\dot{Q}_{\mathrm{i,rad}}$, en $C_{\mathrm{i}}\,\mathrm{d}T_{\mathrm{i}}/\mathrm{d}t = \dot{W}_{\mathrm{i,dis}} + \dot{Q}_{\mathrm{i}} = \dot{W}_{\mathrm{i,dis}} + \dot{Q}_{\mathrm{i,con}} + \dot{Q}_{\mathrm{i,rad}}$, se tiene que: $\dot{Q}_{i,\mathrm{rad}} = A_i\left(E_i - M_i\right) = A_i\left(\alpha_i E_i - \varepsilon_i M_{i,\mathrm{bb}}\right) = \dfrac{M_i - M_{i,\mathrm{bb}}}{\dfrac{1-\varepsilon_i}{A_i\varepsilon_i}}$, que será la suma de los $\dot{Q}_{i\leftarrow j,\mathrm{rad}}$ que llegan de j a i: $\dot{Q}_{i,\mathrm{rad}} = \sum_j \dot{Q}_{i\leftarrow j,\mathrm{rad}} = \sum_j\left(\Phi_{j\to i} - \Phi_{i\to j}\right) = \sum_j\left(M_jA_jF_{j,i} - M_iA_iF_{i,j}\right) = \sum_j\left(M_jA_iF_{i,j} - M_iA_iF_{i,j}\right) = \sum_j \dfrac{M_j - M_i}{\dfrac{1}{A_iF_{i,j}}}$

i.e. en el caso más general de superficies grises: $\dot{Q}_{i,\mathrm{rad}} = \dfrac{M_i - M_{i,\mathrm{bb}}}{\dfrac{1-\varepsilon_i}{A_i\varepsilon_i}} = \sum_j \dfrac{M_j - M_i}{\dfrac{1}{A_iF_{ij}}} = C_i\dfrac{dT_i}{\mathrm{d}t} - \dot{Q}_{\mathrm{i,cond}} - \dot{Q}_{\mathrm{i,conv}} - \dot{W}_{\mathrm{i,dis}}$,

Incógnitas: $\dot{Q}_{i,\mathrm{rad}}$, M_i, y $M_{i,\mathrm{bb}}$ (o T_i), o $\dot{Q}_{i,\mathrm{rad}}$, y T_i en el caso de superficies negras, que queda: $\dot{Q}_{i,\mathrm{rad}} = \sum_j \dfrac{\sigma\left(T_j^4 - T_i^4\right)}{\dfrac{1}{A_iF_{ij}}} = C_i\dfrac{dT_i}{\mathrm{d}t} - \dot{Q}_{\mathrm{i,cond}} - \dot{Q}_{\mathrm{i,conv}} - \dot{W}_{\mathrm{i,dis}}$.

Para <u>recintos de dos paredes</u>:

- Si son iguales (muy próximas) y negras: $\dot{Q}_{12} = A_1\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)$
- Si son iguales (muy próximas) y grises: $\dot{Q}_{12} = \dfrac{A_1\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1}$
- Si una es convexa (la 1) y la otra muy grande: $\dot{Q}_{12} = A_1\varepsilon_1\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)$ (no vale para cóncavas).
- Si una es convexa (la 1) y la otra no tan grande: $\dot{Q}_{12} = \dfrac{A_1\varepsilon_1\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{1 + \dfrac{A_1\varepsilon_1}{A_2\varepsilon_2}\left(1-\varepsilon_2\right)}$
- Caso general de dos nodos: $\dot{Q}_{12} = \dfrac{\sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_1A_1} + \dfrac{1}{A_1F_{12}} + \dfrac{1-\varepsilon_2}{\varepsilon_2A_2}}$

Convección

ECUACIONES GENERALES DEL MOVIMIENTO DE FLUIDOS. NÚMEROS ADIMENSIONALES

(la derivada sustancial es $\mathrm{D}()/\mathrm{D}t \equiv \partial()/\partial t + \vec{v}\cdot\nabla()$):

-Continuidad: $\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = -\rho\nabla\cdot\vec{v}$ (en convección térmica se supone ρ=cte).

-Momento: $\frac{\mathrm{D}\vec{v}}{\mathrm{D}t} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu\nabla^2\vec{v} + \left[1-\alpha\left(T-T_0\right)\right]\vec{g}$ (aproximación de Boussinesq para la flotabilidad).

-Energía: $\frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = a\nabla^2 T + \frac{\phi + \bar{\bar{\tau}}':\nabla\vec{v} + \alpha\,\mathrm{D}p/\mathrm{D}t}{\rho c}$ (de este término sólo se retiene ϕ en convección térmica).

-Especies: $\frac{\mathrm{D}\rho_i}{\mathrm{D}t} = D_i\nabla^2\rho_i + w_i - \rho_i\nabla\cdot\vec{v}$ (el último término es nulo si se supone ρ=cte).

Propiedades(T). Para el agua: $\frac{\mu(T)}{\mu^{\oplus}} \overset{\text{water}}{=} \exp\left[-6\left(1-\frac{T^{\oplus}}{T}\right)\right]$, con $T^{\oplus} = 288\text{ K}$, $\mu^{\oplus} = 0.0011\text{ Pa}\cdot\text{s}$

<u>Agrupaciones adimensionales</u> en problemas convección (muchos parámetros; teorema de Buckingham).

Nusselt $Nu \equiv \frac{hL}{k}$, Reynolds $Re \equiv \frac{vL}{\nu}$, Prandtl $Pr \equiv \frac{\nu}{a}$, Rayleigh $Ra \equiv \frac{\alpha g\Delta TL^3}{\nu a}$, Grashof $Gr \equiv \frac{\alpha g\Delta TL^3}{\nu^2}$

Biot $Bi \equiv \frac{hL}{k}$, Fourier $Fo \equiv \frac{at}{L^2}$, Froude $Fr \equiv \frac{v}{\sqrt{gL}}$, Strouhal $Sr = \frac{\omega L}{v}$, Jackob $Ja = \frac{c\Delta T}{h_{LV}}$,

Graetz $Gz = RePr\frac{D}{x}$, Peclet $Pe = \frac{vL}{a} = RePr$, Stanton $St = \frac{h}{\rho vc} = \frac{Nu}{RePr}$,

Sherwood $Sh = \frac{h_m L}{D_i}$, Schmidt $Sc = \frac{\nu}{D_i}$, Lewis $Le = \frac{a}{D_i} = \frac{Sc}{Pr}$

$\dot{q} \equiv h\left(T-T_\infty\right) = -k\nabla_n T$. Interpretación por tamaños característicos: $Re = \left(\frac{L}{\delta}\right)^2$, $Pr = \left(\frac{\delta}{\delta_T}\right)^2$, $Nu = \frac{L}{\delta_T}$

CAPA LÍMITE

Capa límite laminar ($Re<0.5\cdot10^6$): Con $u'\equiv u/u_\infty$ e $y'\equiv y/\delta(x)$, se busca $u'=f(y')$ con $f(0)=0$, $f(1)=1$, y $f'(1)=0$.

Solución aprox.: $\frac{u}{u_\infty} = 2\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 = 1-\left(\frac{\delta-y}{\delta}\right)^2$, $\frac{\delta}{x} = \frac{5,48}{Re_x^{1/2}}$, $c_f = \frac{0,66}{Re_x^{1/2}} = \frac{1,33}{Re_L^{1/2}}$, $\tau \overset{\text{Laminar}}{\equiv} \mu\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \overset{\text{General}}{\equiv} c_f\frac{1}{2}\rho u_\infty^2$

Capa límite turbulenta: $\frac{u}{u_\infty} = 1-\left(\frac{\delta-y}{\delta}\right)^7$, $\frac{\delta}{x} = \frac{0,38}{Re_x^{1/5}}$, $c_{\mathrm{f},x} = \frac{0.059}{Re_x^{1/5}}$, $c_{\mathrm{f},L} = \frac{0.074}{Re_L^{1/5}} - \frac{1700}{Re_L^{1/2}}$

Analagía de Reynolds (momento-energía): $Nu_x = \frac{c_{f,x}}{2}Re_x$, analogía de Colburn-Chilton: $St_x \equiv \frac{Nu_x}{Pr\,Re_x} = \frac{c_{f,x}}{2Pr^{2/3}}$

Capa límite térmica laminar (sólo para $0.6<Pr<50$): $\frac{T-T_0}{T_\infty-T} = 1-\left(\frac{\delta_T-y}{\delta_T}\right)^2$, $\frac{\delta_T}{\delta} = \frac{0,54}{Pr^{1/3}}\left[1-\left(\frac{x_T}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3}$ si $x_T \neq x$

$$Nu_x = 0,33Pr^{1/3}Re_x^{1/2}\left[1-\left(\frac{x_T}{x}\right)^{3/4}\right]^{-1/3},\quad Nu_L = 0.66\,Pr^{1/3}Re_L^{1/2}\frac{1-\left(\frac{x_0}{L}\right)^{3/4}}{1-\left(\frac{x_0}{L}\right)}$$

Capa límite térmica turbulenta: $Nu_x = 0.030\,Pr^{1/3} Re_x^{4/5}$, $Nu_L = \left(0.037\,Re_x^{4/5} - 870\right) Pr^{1/3}$ (incluye la parte laminar)

CONVECCIÓN FORZADA

Flujo interior

$\dot{m} = \rho u_m \dfrac{\pi D^2}{4}$. Entrada ($\delta/x=5/Re_x^{1/2}$): $x\big|_{\delta=D/2} \equiv L_e$, $L_{e,lam}/D = 0,05\,Re_D Pr$, $L_{e,turb}/D = 1,36\,Re_D^{1/4} \approx 10$

Flujo laminar (Re<2300): $D_h \equiv \dfrac{4A}{p} \overset{A=\pi D^2/4,\; p=\pi D}{=} D$, $\Delta p_t = \lambda \dfrac{L}{D}\dfrac{1}{2}\rho u_m^2$, $u(r) = u_0\left(1-\dfrac{r^2}{R^2}\right) = \dfrac{R^2-r^2}{4\mu}\dfrac{dp}{dx}$, $\lambda = \dfrac{64}{Re_D} = 4c_f$,

$T(r,x) = T_0(x) + \dfrac{\partial T}{\partial x}\dfrac{u_0 R^2}{4a}\left[\left(\dfrac{r}{R}\right)^2 - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{r}{R}\right)^4\right]$, $Nu_D = \dfrac{48}{11} = 4,36$ (si $\dot{q}$=cte; 3.66 si T_w=cte).

Temp. promedio: $T_b \equiv \dfrac{\int_0^R u(r)\rho c T(r) 2\pi r dr}{\int_0^R u(r)\rho c 2\pi r dr} = T_0(x) + \dfrac{7}{96}\dfrac{u_0 R^2}{a}\dfrac{dT}{dx} = T_0(x) + \dfrac{7}{48}\dfrac{u_m R^2}{a}\dfrac{dT}{dx} = T_w(x) - \dfrac{11}{48}\dfrac{u_m R^2}{a}\dfrac{dT}{dx}$

Flujo turbulento (Re<4000): λ(diagrama de Moody), $Nu_D = 0,023\,Re_D^{0,8} Pr^n$ (n=0,4 si dT>0, n=0,3 si dT<0)

Flujo exterior

Sobre placa plana al ras (una cara): Laminar ($Re_L<0,5\cdot 10^6$), $0.6<Pr<60$, $Nu_L = 0,66\,Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$ (Pohlhausen)

Laminar+Turbulenta. ($0,5\cdot 10^6<Re_L<10^8$), $Pr>0,5$, $Nu_L = \left(0,037\,Re_L^{4/5} - 870\right) Pr^{1/3}$

Sobre banda plana frontal (1 cara, $4000<Re_L<15\,000$, $Pr\approx 0,7$), $Nu_L = 0,23\,Re_L^{0,73} Pr^{1/3}$

Sobre cilindro circular ($10^2<Re_D<10^7$; $Re_D Pr>0,2$): $Nu_D = 0,3 + \dfrac{0,62\,Re_D^{1/2} Pr^{1/3}}{\left[1+\left(0,4/Pr\right)^{2/3}\right]^{1/4}}\left[1+\left(\dfrac{Re_D}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5}$

Sobre esfera ($3,5<Re_D<7,6\cdot 10^4$; $0,7<Pr<380$; $1<\mu/\mu_w<3,2$): $Nu_D = 2 + \left(0.4\,Re_D^{1/2} + 0.06\,Re_D^{2/3}\right) Pr^{2/5} \left(\mu/\mu_w\right)^{1/4}$

Sobre haz de tubos al tresbolillo (>10 filas; $0.7<Pr<500$; $1<Pr/Pr_s<3,2$): $Nu_D = C_2 Re_{D,max}^n Pr^{0,36}\left(Pr/Pr_s\right)^{1/4}$,

con $Re_{D,max}^n \equiv \dfrac{v_{max} D}{\nu}$ y $v_{max} = \left[s_v/\left(s_d - D\right)\right] v_\infty$ si $\left[s_h^2 + \left(s_v/2\right)^2\right]^{1/2} < \left(s_v + D\right)/2$,

o $v_{max} = \left[s_v/\left(s_v - D\right)\right] v_\infty$ si no (s_v es el paso vertical y s_h el paso horizontal), y con:

$Re_{D,max}$	C_2	n
$0<Re<5\cdot 10^2$	1,04	0,4
$5\cdot 10^2<Re<10^3$	0,71	0,5
$10^3<Re<2\cdot 10^5$	$0,35(s_v/s_h)^{0,2}$	0,6
$2\cdot 10^5<Re<2\cdot 10^6$	$0,031(s_v/s_h)^{0,2}$	0,8

CONVECCIÓN NATURAL

Capa límite laminar vertical ($Ra_x<10^9$, $\forall Pr$): $Nu_x = \dfrac{0,53\,Pr^{1/4}}{\left(0,61 + 1,22\sqrt{Pr} + 1.24\,Pr\right)^{1/4}} Ra_x^{1/4}$, $Nu_L = 0,59\,Ra_L^{1/4}$

$$\frac{u(x,y)}{\nu/x}=f_2(Pr)\sqrt{Gr_x}\,\frac{y}{\delta(x)}\left(1-\frac{y}{\delta(x)}\right)^2,\quad f_2(Pr)=\frac{5{,}17}{\sqrt{(0{,}95+Pr)}},$$

$$\frac{\delta(x)}{x}=\frac{f_1(Pr)}{Gr_x^{1/4}},\quad f_1(Pr)=\frac{3{,}93\left(0{,}95+Pr\right)^{1/4}}{\sqrt{Pr}},\qquad \frac{T(x,y)-T_\infty}{T_w-T_\infty}=\left(1-\frac{y}{\delta(x)}\right)^2$$

Exterior

Convección natural sobre pared horizontal caliente y bajo pared fría: $Nu_L=0{,}54Ra_L^{1/4}$ para $10^4<Ra<10^7$

Convección natural sobre pared horizontal fría y bajo pared caliente: $Nu_L=0{,}27Ra_L^{1/4}$ para $10^5<Ra<10^{11}$

Convección nat, alrededor de tubo horizontal: laminar (Ra_D<10^9) $Nu_D=0{,}53Ra_D^{1/4}$, turbulento $Nu_D=0{,}13Ra_D^{1/3}$

Convección natural alrededor de una esfera: laminar (Ra_D<10^{11}, " Pr) $Nu_D=2+\dfrac{0{,}59Ra_D^{\frac{1}{4}}}{\left(1+\left(\dfrac{0{,}47}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right)^{\frac{4}{9}}}$.

Interior (chimenea)

Convección natural dentro de un conducto de altura L y radio hidráulico R, para gases (Pr~1):

$Nu_R=\left[\left(\dfrac{\overline{Ra}}{C}\right)^m+\left(0.8\,\overline{Ra}^{\frac{1}{4}}\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}$. siendo $\overline{Ra}\equiv\dfrac{g\alpha\left(T-T_\infty\right)R^4}{\nu aL}<10^5$ y C=16, m=–1 para conducto circular, C=14, m=–1 para conducto cuadrado de lado s=2R, y C=24, m=–2 para ranura de ancho w=R.

CAMBIADORES DE CALOR

Balances energéticos: $\dot{Q}=\dot{m}_1c_1\left(T_{1,\text{in}}-T_{1,\text{out}}\right)=\dot{m}_2c_2\left(T_{2,\text{out}}-T_{2,\text{in}}\right)=KA\Delta T_{12,\text{mean}}$

Coeficiente global de transmisión (pared delgada): $K=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\eta_{\text{fin}1}h_1}+R_{\text{f}1}+\dfrac{L_{12}}{k_{12}}+\dfrac{1}{\eta_{\text{fin}2}h_2}+R_{\text{f}2}}$ (R_f, 'fouling resistance')

Diferencia de temperatura media logarítmica en cambiadores: $\Delta T_{12,\text{mean}}=\Delta T_{\text{LMTD}}=\dfrac{\left(T_1-T_2\right)_{x=L}-\left(T_1-T_2\right)_{x=0}}{\ln\dfrac{\left(T_1-T_2\right)_{x=L}}{\left(T_1-T_2\right)_{x=0}}}$

Cálculo por el método NUT: $N\equiv\dfrac{KA}{\left(\dot{m}c\right)_{\min}}$, $c\equiv\dfrac{\left(\dot{m}c\right)_{\min}}{\left(\dot{m}c\right)_{\max}}$, $\eta\equiv\dfrac{\dot{Q}}{\dot{Q}\big|_{A\to\infty}}=\dfrac{\dot{m}c\Delta T_{in,out}}{\left(\dot{m}c\right)_{\min}\Delta T_{in,out}\big|_{\max}}=\eta\left(N,c\right)$

Configuración	$\eta=\eta\,(N,c)$	$N=N(\eta,c)$
Flujo coaxial a contracorriente	$\eta=\dfrac{1-e^{-N(1-c)}}{1-ce^{-N(1-c)}}$	$N=\dfrac{1}{1-c}\ln\dfrac{1-c\eta}{1-\eta}$
Flujo coaxial concurrente	$\eta=\dfrac{1-e^{-N(1+c)}}{1+c}$	$N=\dfrac{\ln\left[\eta\left(1+c\right)-1\right]}{1+c}$

Cambiador STHE de un paso por carcasa y pasos pares por tubos	$$\eta=\frac{2}{1+c+\sqrt{1+c^2}\,\dfrac{1+e^{-N\sqrt{1+c^2}}}{1-e^{-N\sqrt{1+c^2}}}}$$	$$N=\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\ln\frac{\dfrac{2}{\eta}+\sqrt{1+c^2}-(1+c)}{\dfrac{2}{\eta}-\sqrt{1+c^2}-(1+c)}$$
Flujo cruzado con un solo paso $(\dot{m}c)_{\min}$ – mezclado, $(\dot{m}c)_{\max}$ – no-mezclado	$$\eta=1-e^{\frac{\exp(-cN)-1}{c}}$$	$$N=-\frac{\ln\left[c\ln(1-\eta)+1\right]}{c}$$
Flujo cruzado con un solo paso $(\dot{m}c)_{\min}$ – no-mezclado, $(\dot{m}c)_{\max}$ – mezclado	$$\eta=\frac{1}{c}\left(1-e^{1-c[1-\exp(-N)]}\right)$$	$$N=-\ln\left[1+\frac{\ln(1-c\eta)}{c}\right]$$
Cambiadores con c=0 (i.e. de cambio de fase)	$$\eta=1-e^{-N}$$	$$N=-\ln(1-\eta)$$