



# FORMULARIO TÉRMICO (TRANSMISIÓN DE CALOR)

[Formulario de termodinámica](#) (modelos de sustancias, energía, entropía, exergía, cambio de fase, mezclas...)

|  |   |
|--|---|
| Transmisión de calor .....   | 1 |
| Conducción.....  | 1 |
| Soluciones unidimensionales estacionarias:.....                                  | 2 |
| Soluciones unidimensionales no-estacionarias.....                                | 2 |
| Transmisión de calor en aletas y varillas.....                                   | 3 |
| Simulación numérica .....  | 3 |
| Radiación.....   | 4 |
| Espectro electromagnético y efectos térmicos .....                               | 4 |
| Radiación de cuerpo negro: .....   | 4 |
| Propiedades termo-ópticas.....   | 4 |
| Calor por radiación IR entre superficies en el vacío. Factores geométricos ..... | 4 |
| Convección .....   | 6 |
| Ecuaciones generales del movimiento de fluidos. Números adimensionales .....     | 6 |
| Capa límite.....   | 6 |
| Convección forzada.....  | 7 |
| Convección natural.....  | 7 |
| Cambiadores de calor .....   | 8 |

## Transmisión de calor

Calor y flujo de calor:  $Q \equiv \Delta E - W$ ,  $\dot{Q} \equiv \frac{dE}{dt} \Big|_{W=0} = \frac{dH}{dt} \Big|_p \equiv KA\Delta T = G\Delta T = \Delta T / R = A\Delta T / M$ ,  $\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = K\Delta T$

Modos de transmisión:  $\vec{q} = K\Delta T$  {

- conducción  $\vec{q} \equiv -k\nabla T$  (unidimensional:  $\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x}$ )
- convección  $\dot{q} \equiv h(T - T_\infty)$  (e.g. conv. nat. en aire:  $h \sim 10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ )
- radiación  $\dot{q} = \varepsilon\sigma(T^4 - T_0^4)$  ( $\varepsilon < 1$ ,  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ )

## Conducción

Ecuación del calor:  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T + \phi$  o  $\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T + \frac{\phi}{\rho c}$  con  $a \equiv \frac{k}{\rho c}$ . Caso plano:  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\phi}{k} = 0$

[Datos de k](#). Ley de Lorentz (para cuando la conducción está dominada por los electrones):  $k = \frac{\pi^3}{3} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 T \sigma_{electr}$

Ecuación del calor con fuentes internas y convección:  $\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T + \frac{\phi}{\rho c} - \nabla \cdot (T\vec{v})$

## SOLUCIONES UNIDIMENSIONALES ESTACIONARIAS:

-Plana:  $T(x) = Ax + B - \frac{\phi}{2k}x^2$ ,  $\dot{Q}_{12}^{\phi=0} = k_{12}A \frac{T_1 - T_2}{L_{12}}$ ,  $T_0^{T_1=T_2=T_s} = T_s + \frac{\phi L^2}{4k}$  ( $T$ -central en pared simétrica)

-Cilíndrica:  $T(r) = A \ln r + B - \frac{\phi}{4k}r^2$ ,  $\dot{Q}_{12}^{\phi=0} = k_{12}2\pi L \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}}$ ,  $T_0 = T_s + \frac{\phi R^2}{4k}$  (en el eje)

-Esférica:  $T(r) = \frac{A}{r} + B - \frac{\phi}{6k}r^2$ ,  $\dot{Q}_{12}^{\phi=0} = k_{12}4\pi \frac{T_1 - T_2}{\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}}$ ,  $T_0 = T_s + \frac{\phi R^2}{6k}$  (en el centro)

Conducción de calor unidimensional estacionaria a través de una pared plana compuesta:

$$\dot{q} = K\Delta T = \frac{\Delta T}{R} = k_{12} \frac{T_2 - T_1}{L_{12}} = k_{23} \frac{T_3 - T_2}{L_{23}} = \dots = \frac{T_n - T_1}{\sum \frac{L_i}{k_i}} \Rightarrow K = \frac{1}{\sum \frac{L_i}{k_i}}, \quad R = \sum R_i = \sum \frac{L_i}{k_i}$$

Espesor crítico de aislamiento cilíndrico (para que sea mínimo el calor):  $\Delta R = R_2 - R_1 = \frac{k}{h} - R_1$  (si  $\Delta R > 0$ )

Espesor crítico de aislamiento esférico (para que sea mínimo el calor):  $\Delta R = R_2 - R_1 = \frac{2k}{h} - R_1$  (si  $\Delta R > 0$ )

Fuente superficial cilíndrica en  $R_1$  con  $T_2$  en  $R_2$ :  $T(r > R_1) = T_2 + \phi \frac{r}{k} \ln \frac{R_2}{r}$

Fuente superficial esférica en  $R_1$  con  $T_2$  en  $R_2$ :  $T(r > R_1) = T_2 + \phi \frac{r^2}{k} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$

## SOLUCIONES UNIDIMENSIONALES NO-ESTACIONARIAS

Deposición de energía en el instante  $t=0$  en el punto  $r=0$ . Caso plano ( $n=0$ ), cilíndrico ( $n=1$ ) o esférico ( $n=2$ ):

$$\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \xrightarrow{\eta(r,t) = \frac{r}{\sqrt{4at}}} \frac{d^2 T(\eta)}{d\eta^2} + \left( 2\eta + \frac{n}{\eta} \right) \frac{dT(\eta)}{d\eta} = 0 \rightarrow T(r,t) = \frac{Q \exp\left(\frac{-r^2}{4at}\right)}{\rho c (4\pi at)^{\frac{1+n}{2}}}$$

Parámetros adimensionales usados en conducción de calor: número de Fourier  $Fo \equiv \frac{at}{L^2}$ , número de  $Bi \equiv \frac{hL}{k}$

Calentamiento/enfriamiento por convección con un sólido muy conductor ( $Bi \rightarrow 0$ ):

$$\dot{Q} = \frac{dH}{dt} = KA\Delta T \longrightarrow mc \frac{dT}{dt} = -hA(T - T_\infty) \Rightarrow \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp\left(-\frac{hA}{mc}t\right) = \exp(-Bi Fo)$$

Tiempo de relajación por conducción ( $Bi \rightarrow \infty$ ):  $\Delta t \approx \frac{\Delta H}{\dot{Q}} \approx \frac{mc\Delta T}{KA\Delta T} \approx \frac{mc\Delta T}{kA \frac{\Delta T}{L}} \approx \frac{\rho L^3 c}{kL^2 \frac{1}{L}} = \frac{\rho c L^2}{k} = \frac{L^2}{a}$

Tiempo de relajación por convección ( $Bi \rightarrow 0$ ):  $\Delta t \approx \frac{\Delta H}{\dot{Q}} \approx \frac{mc\Delta T}{KA\Delta T} \approx \frac{mc}{hA} \approx \frac{\rho L^3 c}{hL^2} = \frac{\rho c L}{h}$

Salto de temperatura superficial en sól. semi-inf.:  $\frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)$ ,  $\dot{q} = -k \frac{(T_\infty - T_0)}{\sqrt{\pi at}} \exp\left(\frac{-x^2}{4at}\right)$

Salto de flujo de calor superficial en sól. semi-inf.:  $T - T_0 = q_0 \left[ \frac{2\sqrt{at/\pi}}{k} \exp\left(\frac{-x^2}{4at}\right) - \frac{x}{k} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \right]$

Variación periódica de temp. superf. en sól. semi-inf.:  $\frac{T - T_{\text{mean}}}{T_{\text{max}} - T_{\text{mean}}} = \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{a\tau/\pi}}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{x}{\sqrt{a\tau/\pi}}\right)$

Para sólidos finitos pueden usarse los gráficos de Heisler (o soluciones numéricas).

Probl. de Stefan:  $\frac{\dot{Q}}{A} = h_a(T_a - T_0) = k \frac{T_0 - T_w}{x} = \rho h_{SL} \frac{dz}{dt}$ ,  $z = \frac{-k}{h} + \sqrt{\left(\frac{k}{h}\right)^2 + \frac{2k(T_w - T_a)}{\rho h_{SL}}} t$ ,  $T_0 = \frac{\frac{k}{zh} T_f + T_a}{1 + \frac{k}{zh}}$

## TRANSMISIÓN DE CALOR EN ALETAS Y VARILLAS

$$(\rho A dx) c \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q}(x+dx) A(x+dx) - \dot{q}(x) A(x) + \dot{q}_w(x) A_w(x) + \phi(x) A(x) dx$$

que para una aleta casi-unidimensional aislada y en régimen estacionario:  $\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d \ln A}{dx} \frac{dT}{dx} + \frac{\phi}{k} = 0$

que para aleta unidim. plana en régimen estacion. y  $\phi=0$ :  $\frac{d^2 T}{dx^2} - (T - T_\infty) \frac{hp}{kA} = 0$ ,  $T - T_\infty = Ae^{mx} + Be^{-mx}$

y despreciando la transmisión en un extremo:  $\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$  y  $\dot{Q}_0 = \sqrt{hp k A} (T_\infty - T_0) \tanh(mL)$

## SIMULACIÓN NUMÉRICA

$T^{approx}(\bar{x}, t) = T^{IBC}(\bar{x}, t) + \sum_{i=1}^N T_i(t) \phi_i(\bar{x})$ , con funciones conocidas ( $T^{IBC}(\bar{x}, t)$  y  $\phi_i(\bar{x})$ ) y coeficientes a determinar ( $T_i(t)$ ), por ajuste con la ecuación del calor o con el balance energético.

Diferencias finitas:  $mc \frac{\Delta T}{\Delta t} = \dot{Q}_{\text{net}}$ ,

1D (genérico):  $\rho A \Delta x c \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} = k A \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{\Delta x} - k A \frac{T_i^j - T_{i-1}^j}{\Delta x} + \phi A \Delta x - h_{lat} p \Delta x (T_i^j - T_\infty)$

1D (0):  $T_0^{j+1} = T_0^j + 2Fo(T_1^j - T_0^j) + \frac{\phi \Delta t}{\rho c} - \frac{p \Delta t}{\rho c A} [h_{lat} (T_0^j - T_\infty) + \varepsilon_{lat} \sigma (T_0^{4j} - T_\infty^4)] +$   
 $+ \frac{2 \Delta t}{\rho c \Delta x} [E_0 - h_0 (T_0^j - T_\infty) - \varepsilon_0 \sigma (T_0^{4j} - T_\infty^4)]$

1D (i):  $T_i^{j+1} = T_i^j + Fo(T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j) + \frac{\phi \Delta t}{\rho c} - \frac{p \Delta t}{\rho c A} [h_{lat} (T_i^j - T_\infty) + \varepsilon_{lat} \sigma (T_i^{4j} - T_\infty^4)]$

1D (N):  $T_N^{j+1} = T_N^j + 2Fo(T_N^j - T_{N-1}^j) + \frac{\phi \Delta t}{\rho c} - \frac{p \Delta t}{\rho c A} [h_{lat} (T_N^j - T_\infty) + \varepsilon_{lat} \sigma (T_N^{4j} - T_\infty^4)] +$   
 $+ \frac{2 \Delta t}{\rho c \Delta x} [E_N - h_N (T_N^j - T_\infty) - \varepsilon_N \sigma (T_N^{4j} - T_\infty^4)]$

# Radiación

Radiación de energía (electromagnética, acústica...) o de partículas (electrones, protones, neutrones...).

## ESPECTRO ELECTROMAGNÉTICO Y EFECTOS TÉRMICOS

$\lambda$  [m]:  $\gamma < 10^{-10} < X < 10^{-8} < UV < 0.4 \cdot 10^{-6} < VIS < 0.7 \cdot 10^{-6} < IRc < 3 \cdot 10^{-6} < IRI < 10^{-3} < MW < 10^{-2} < RW$

Propagación rectilínea direccional en el vacío a velocidad  $c=300 \cdot 10^6$  m/s.

Vibración transversal,  $E=h\nu$  con  $h=6.6 \cdot 10^{-34}$  J·s;  $c=\lambda\nu$ . ( $k=1.38 \cdot 10^{-23}$  J/K)

Interacción materia-radiación: emisión, absorción, transmisión, reflexión.

Radiación térmica es la debida al estado térmico (emitida en el movimiento microscópico en el equilibrio), aunque se puede emitir la misma radiación por procesos no térmicos (e.g. emisión estimulada, luminiscencia).

Radiación solar (media extraterrestre),  $E=1360$  W/m<sup>2</sup> (10% UV, 40% visible). A nivel del mar, sin nubes, subsolar, unos 900 W/m<sup>2</sup> directa más unos 90 W/m<sup>2</sup> difusa.

## RADIACIÓN DE CUERPO NEGRO:

Cavidad opaca, al vacío, en equilibrio materia-radiación:  $U(T) = \sum N_\nu h\nu = \text{cte}$  con  $S(U)=\text{máx}$ , requiere  $N_\nu(\nu)$ :

$$\frac{dN_\nu}{V} = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3 \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]} \quad (\text{estadística Bose-Einstein}), \text{ o bien } du_\lambda = (dN_\nu/V)h\nu \text{ y } u(T) = \int_0^\infty h\nu \frac{dN_\nu}{V} = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4.$$

Emitancia (potencia por unidad de área),  $M \equiv d\Phi/dA$ : Planck,  $M_{bb,\lambda} = \frac{A}{\lambda^5 \left[ \exp\left(\frac{B}{\lambda T}\right) - 1 \right]}$  (93% in  $\lambda_m/2 < l < 4\lambda_m$ ).

Corolarios: Ley de Stefan-Boltzmann,  $M_{bb} = \int_0^\infty M_{bb,\lambda} d\lambda = \sigma T^4$ ; Ley de Wien,  $\lambda|_{M_{\text{max}}} = \frac{C}{T}$ ,

$$\text{con } \sigma = \frac{15\pi}{AB^4} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}, A=2\pi hc^2=3,7 \cdot 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{m}^2, B=hc/k=0,014 \text{ m} \cdot \text{K}, C=0,0029 \text{ m} \cdot \text{K}.$$

Intensidad (potencia por unidad de ángulo sólido),  $I \equiv d\Phi/d\Omega$ , con  $d\Omega \equiv dA/r^2 = \sin\theta d\theta d\phi$  ( $\theta$  es la colatitud).

Radiancia (potencia por unidad de área normal y ángulo sólido),  $L \equiv d^2\Phi/(dA_\perp d\Omega)$ . Superficies difusas:  $M=\pi L$ .

## PROPIEDADES TERMO-ÓPTICAS

Radiancia (potencia por unidad de área normal y ángulo sólido),  $L \equiv d^2\Phi/(dA_\perp d\Omega)$ . Superficies difusas:  $M=\pi L$ .

Emisividad,  $\varepsilon_{\lambda,T,\Omega} \equiv L_{\lambda,T,\Omega}/L_{bb,\lambda,T}$ .

Irradiancia (potencia incidente por unidad de área),  $E \equiv \int_{2\pi} L \cos\theta d\Omega$ .

Absortancia (o absorptividad),  $\alpha_{\lambda,T,\Omega} \equiv L_{\lambda,T,\Omega,abs}/L_{\lambda,T,\Omega,inc}$ .

Ley de Kirchhoff:  $\varepsilon_{\lambda,T,\Omega} = \alpha_{\lambda,T,\Omega}$  (reversibilidad del equilibrio detallado), pero en general  $\varepsilon \neq \alpha$ .

Transmisión y reflexión. En una interfase,  $\alpha + \rho + \tau = 1$  (balance energético). Por isotropía:  $\rho_{\lambda,T,\Omega,\Omega'} = \rho_{\lambda,T,\Omega',\Omega}$ .

Exitancia (potencia por unidad de área que sale por emisión o por reflexión),  $M = \varepsilon M_{bb} + \rho E$  (antes radiosidad).

Superficies con emisión difusa, con reflexión difusa, con reflexión especular, con retrorreflexión.

Superficie grises si  $\varepsilon \neq \varepsilon(\lambda) < 1$ .

## CALOR POR RADIACIÓN IR ENTRE SUPERFICIES EN EL VACÍO. FACTORES GEOMÉTRICOS

Entre superficies isothermas, difusas y grises, se define el factor de visión,  $F_{12}$ , como la fracción de la energía que sale de la superficie  $A_1$  (por emisión o por reflexión), que incide sobre la superficie  $A_2$  (se absorba o no).

$$dF_{12} \equiv \frac{d^2\Phi_{12}}{M_1 dA_1} = \frac{L_1 dA_1 \cos\theta_1 d\Omega_{12}}{M_1 dA_1} = \frac{\cos\theta_1}{\pi} d\Omega_{12} = \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{\pi r_{12}^2} dA_2 \rightarrow F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos\beta_1 \cos\beta_2}{r_{12}^2} dA_1 dA_2$$

[Tabla de factores de visión](#). Álgebra de los factores de visión:

$$0 \leq F_{12} \leq 1, \sum_j F_{1j} = 1, A_1 F_{12} = A_2 F_{21}, F_{1,2+3} = F_{12} + F_{13}, F_{1+2,3} = \frac{A_1 F_{13} + A_2 F_{23}}{A_1 + A_2}$$

Para calcular el calor que recibe el nodo  $i$  por radiación,  $\dot{Q}_{i,\text{rad}}$ , en  $C_i dT_i/dt = \dot{W}_{i,\text{dis}} + \dot{Q}_i = \dot{W}_{i,\text{dis}} + \dot{Q}_{i,\text{con}} + \dot{Q}_{i,\text{rad}}$ , se tiene que:  $\dot{Q}_{i,\text{rad}} = A_i (E_i - M_i) = A_i (\alpha_i E_i - \varepsilon_i M_{i,\text{bb}}) = \frac{M_i - M_{i,\text{bb}}}{\frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i}}$ , que será la suma de los  $\dot{Q}_{i \leftarrow j, \text{rad}}$  que llegan de  $j$

$$\text{a } i: \dot{Q}_{i,\text{rad}} = \sum_j \dot{Q}_{i \leftarrow j, \text{rad}} = \sum_j (\Phi_{j \rightarrow i} - \Phi_{i \rightarrow j}) = \sum_j (M_j A_j F_{j,i} - M_i A_i F_{i,j}) = \sum_j (M_j A_i F_{i,j} - M_i A_i F_{i,j}) = \sum_j \frac{M_j - M_i}{\frac{1}{A_i F_{i,j}}}$$

i.e. en el caso más general de superficies grises:  $\dot{Q}_{i,\text{rad}} = \frac{M_i - M_{i,\text{bb}}}{\frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i}} = \sum_j \frac{M_j - M_i}{\frac{1}{A_i F_{ij}}} = C_i \frac{dT_i}{dt} - \dot{Q}_{i,\text{cond}} - \dot{Q}_{i,\text{conv}} - \dot{W}_{i,\text{dis}}$ ,

Incógnitas:  $\dot{Q}_{i,\text{rad}}$ ,  $M_i$ , y  $M_{i,\text{bb}}$  (o  $T_i$ ), o  $\dot{Q}_{i,\text{rad}}$ , y  $T_i$  en el caso de superficies negras, que queda:

$$\dot{Q}_{i,\text{rad}} = \sum_j \frac{\sigma (T_j^4 - T_i^4)}{\frac{1}{A_i F_{ij}}} = C_i \frac{dT_i}{dt} - \dot{Q}_{i,\text{cond}} - \dot{Q}_{i,\text{conv}} - \dot{W}_{i,\text{dis}}.$$

Para recintos de dos paredes:

- Si son iguales (muy próximas) y negras:  $\dot{Q}_{12} = A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$
- Si son iguales (muy próximas) y grises:  $\dot{Q}_{12} = \frac{A_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$
- Si una es convexa (la 1) y la otra muy grande:  $\dot{Q}_{12} = A_1 \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$  (no vale para cóncavas).
- Si una es convexa (la 1) y la otra no tan grande:  $\dot{Q}_{12} = \frac{A_1 \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{1 + \frac{A_1 \varepsilon_1}{A_2 \varepsilon_2} (1 - \varepsilon_2)}$
- Caso general de dos nodos:  $\dot{Q}_{12} = \frac{\sigma (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}}$

# Convección

## ECUACIONES GENERALES DEL MOVIMIENTO DE FLUIDOS. NÚMEROS ADIMENSIONALES

(la derivada sustancial es  $D()/Dt \equiv \partial()/\partial t + \vec{v} \cdot \nabla()$ ):

-Continuidad:  $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v}$  (en convección térmica se supone  $\rho = \text{cte}$ ).

-Momento:  $\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} + [1 - \alpha(T - T_0)] \vec{g}$  (aproximación de Boussinesq para la flotabilidad).

-Energía:  $\frac{DT}{Dt} = a \nabla^2 T + \frac{\phi + \bar{v}' : \nabla \vec{v} + \alpha Dp/Dt}{\rho c}$  (de este término sólo se retiene  $\phi$  en convección térmica).

-Especies:  $\frac{D\rho_i}{Dt} = D_i \nabla^2 \rho_i + w_i - \rho_i \nabla \cdot \vec{v}$  (el último término es nulo si se supone  $\rho = \text{cte}$ ).

Propiedades(T). Para el agua:  $\frac{\mu(T)}{\mu^\oplus} = \exp \left[ -6 \left( 1 - \frac{T^\oplus}{T} \right) \right]$ , con  $T^\oplus = 288 \text{ K}$ ,  $\mu^\oplus = 0.0011 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

Agrupaciones adimensionales en problemas convección (muchos parámetros; teorema de Buckingham).

Nusselt  $Nu \equiv \frac{hL}{k}$ , Reynolds  $Re \equiv \frac{vL}{\nu}$ , Prandtl  $Pr \equiv \frac{\nu}{a}$ , Rayleigh  $Ra \equiv \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\nu a}$ , Grashof  $Gr \equiv \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\nu^2}$

Biot  $Bi \equiv \frac{hL}{k}$ , Fourier  $Fo \equiv \frac{at}{L^2}$ , Froude  $Fr \equiv \frac{v}{\sqrt{gL}}$ , Strouhal  $Sr \equiv \frac{\omega L}{v}$ , Jakob  $Ja \equiv \frac{c \Delta T}{h_{LV}}$ ,

Graetz  $Gz = RePr \frac{D}{x}$ , Peclet  $Pe \equiv \frac{vL}{a} = RePr$ , Stanton  $St \equiv \frac{h}{\rho v c} = \frac{Nu}{RePr}$ ,

Sherwood  $Sh \equiv \frac{h_m L}{D_i}$ , Schmidt  $Sc \equiv \frac{\nu}{D_i}$ , Lewis  $Le \equiv \frac{a}{D_i} = \frac{Sc}{Pr}$

$\dot{q} \equiv h(T - T_\infty) = -k \nabla_n T$ . Interpretación por tamaños característicos:  $Re = \left( \frac{L}{\delta} \right)^2$ ,  $Pr = \left( \frac{\delta}{\delta_T} \right)^2$ ,  $Nu = \frac{L}{\delta_T}$

## CAPA LÍMITE

Capa límite laminar ( $Re < 0.5 \cdot 10^6$ ): Con  $u' \equiv u/u_\infty$  e  $y' \equiv y/\delta(x)$ , se busca  $u' = f(y')$  con  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 1$ , y  $f'(1) = 0$ .

Solución aprox.:  $\frac{u}{u_\infty} = 2 \frac{y}{\delta} - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 = 1 - \left( \frac{\delta - y}{\delta} \right)^2$ ,  $\frac{\delta}{x} = \frac{5,48}{Re_x^{1/2}}$ ,  $c_f = \frac{0,66}{Re_x^{1/2}} = \frac{1,33}{Re_L^{1/2}}$ ,  $\tau \equiv \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \equiv c_f \frac{1}{2} \rho u_\infty^2$

Capa límite turbulenta:  $\frac{u}{u_\infty} = 1 - \left( \frac{\delta - y}{\delta} \right)^7$ ,  $\frac{\delta}{x} = \frac{0,38}{Re_x^{1/5}}$ ,  $c_{f,x} = \frac{0,059}{Re_x^{1/5}}$ ,  $c_{f,L} = \frac{0,074}{Re_L^{1/5}} - \frac{1700}{Re_L^{1/2}}$

Analogía de Reynolds (momento-energía):  $Nu_x = \frac{c_{f,x}}{2} Re_x$ , analogía de Colburn-Chilton:  $St_x \equiv \frac{Nu_x}{Pr Re_x} = \frac{c_{f,x}}{2 Pr^{2/3}}$

Capa límite térmica laminar (sólo para  $0.6 < Pr < 50$ ):  $\frac{T - T_0}{T_\infty - T} = 1 - \left( \frac{\delta_T - y}{\delta_T} \right)^2$ ,  $\frac{\delta_T}{\delta} = \frac{0,54}{Pr^{1/3}} \left[ 1 - \left( \frac{x_T}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3}$  si  $x_T \neq x$

$$Nu_x = 0,33 Pr^{1/3} Re_x^{1/2} \left[ 1 - \left( \frac{x_T}{x} \right)^{3/4} \right]^{-1/3}, \quad Nu_L = 0,66 Pr^{1/3} Re_L^{1/2} \frac{1 - \left( \frac{x_0}{L} \right)^{3/4}}{1 - \left( \frac{x_0}{L} \right)}$$

Capa límite térmica turbulenta:  $Nu_x = 0.030 Pr^{1/3} Re_x^{4/5}$ ,  $Nu_L = (0.037 Re_x^{4/5} - 870) Pr^{1/3}$  (incluye la parte laminar)

## CONVECCIÓN FORZADA

### Flujo interior

$\dot{m} = \rho u_m \frac{\pi D^2}{4}$ . Entrada ( $\delta/x=5/Re_x^{1/2}$ ):  $x|_{\delta=D/2} \equiv L_e$ ,  $L_{e,lam}/D = 0,05 Re_D Pr$ ,  $L_{e,turb}/D = 1,36 Re_D^{1/4} \approx 10$

Flujo laminar ( $Re < 2300$ ):  $D_h \equiv \frac{4A}{p} \stackrel{A=\pi D^2/4}{p=\pi D} = D$ ,  $\Delta p_t = \lambda \frac{L}{D} \frac{1}{2} \rho u_m^2$ ,  $u(r) = u_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{R^2 - r^2}{4\mu} \frac{dp}{dx}$ ,  $\lambda = \frac{64}{Re_D} = 4c_f$ ,

$T(r, x) = T_0(x) + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{u_0 R^2}{4a} \left[ \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R}\right)^4 \right]$ ,  $Nu_D = \frac{48}{11} = 4,36$  (si  $\dot{q} = cte$ ; 3.66 si  $T_w = cte$ ).

Temp. promedio:  $T_b \equiv \frac{\int_0^R u(r) \rho c T(r) 2\pi r dr}{\int_0^R u(r) \rho c 2\pi r dr} = T_0(x) + \frac{7}{96} \frac{u_0 R^2}{a} \frac{dT}{dx} = T_0(x) + \frac{7}{48} \frac{u_m R^2}{a} \frac{dT}{dx} = T_w(x) - \frac{11}{48} \frac{u_m R^2}{a} \frac{dT}{dx}$

Flujo turbulento ( $Re < 4000$ ):  $\lambda$  (diagrama de Moody),  $Nu_D = 0,023 Re_D^{0,8} Pr^n$  ( $n=0,4$  si  $dT > 0$ ,  $n=0,3$  si  $dT < 0$ )

### Flujo exterior

Sobre placa plana al ras (una cara): Laminar ( $Re_L < 0,5 \cdot 10^6$ ),  $0,6 < Pr < 60$ ,  $Nu_L = 0,66 Re_L^{1/2} Pr^{1/3}$  (Pohlhausen)

Laminar+Turbulenta. ( $0,5 \cdot 10^6 < Re_L < 10^8$ ),  $Pr > 0,5$ ,  $Nu_L = (0,037 Re_L^{4/5} - 870) Pr^{1/3}$

Sobre banda plana frontal (1 cara,  $4000 < Re_L < 15\ 000$ ,  $Pr \approx 0,7$ ),  $Nu_L = 0,23 Re_L^{0,73} Pr^{1/3}$

Sobre cilindro circular ( $10^2 < Re_D < 10^7$ ;  $Re_D Pr > 0,2$ ):  $Nu_D = 0,3 + \frac{0,62 Re_D^{1/2} Pr^{1/3}}{\left[1 + (0,4/Pr)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re_D}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5}$

Sobre esfera ( $3,5 < Re_D < 7,6 \cdot 10^4$ ;  $0,7 < Pr < 380$ ;  $1 < \mu/\mu_w < 3,2$ ):  $Nu_D = 2 + (0,4 Re_D^{1/2} + 0,06 Re_D^{2/3}) Pr^{2/5} (\mu/\mu_w)^{1/4}$

Sobre haz de tubos al tresbolillo ( $> 10$  filas;  $0,7 < Pr < 500$ ;  $1 < Pr/Pr_s < 3,2$ ):  $Nu_D = C_2 Re_{D,max}^n Pr^{0,36} (Pr/Pr_s)^{1/4}$ ,

con  $Re_{D,max}^n \equiv \frac{v_{max} D}{\nu}$  y  $v_{max} = [s_v / (s_d - D)] v_\infty$  si  $\left[s_h^2 + (s_v/2)^2\right]^{1/2} < (s_v + D)/2$ ,

o  $v_{max} = [s_v / (s_v - D)] v_\infty$  si no ( $s_v$  es el paso vertical y  $s_h$  el paso horizontal), y con:

| $Re_{D,max}$                       | $C_2$                   | $n$ |
|------------------------------------|-------------------------|-----|
| $0 < Re < 5 \cdot 10^2$            | 1,04                    | 0,4 |
| $5 \cdot 10^2 < Re < 10^3$         | 0,71                    | 0,5 |
| $10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$         | $0,35 (s_v/s_h)^{0,2}$  | 0,6 |
| $2 \cdot 10^5 < Re < 2 \cdot 10^6$ | $0,031 (s_v/s_h)^{0,2}$ | 0,8 |

## CONVECCIÓN NATURAL

Capa límite laminar vertical ( $Ra_x < 10^9$ ,  $\forall Pr$ ):  $Nu_x = \frac{0,53 Pr^{1/4}}{(0,61 + 1,22 \sqrt{Pr} + 1,24 Pr)^{1/4}} Ra_x^{1/4}$ ,  $Nu_L = 0,59 Ra_L^{1/4}$

$$\frac{u(x,y)}{v/x} = f_2(Pr) \sqrt{Gr_x} \frac{y}{\delta(x)} \left(1 - \frac{y}{\delta(x)}\right)^2, \quad f_2(Pr) = \frac{5,17}{\sqrt{(0,95 + Pr)}},$$

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{f_1(Pr)}{Gr_x^{1/4}}, \quad f_1(Pr) = \frac{3,93(0,95 + Pr)^{1/4}}{\sqrt{Pr}}, \quad \frac{T(x,y) - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \left(1 - \frac{y}{\delta(x)}\right)^2$$

### Exterior

Convección natural sobre pared horizontal caliente y bajo pared fría:  $Nu_L = 0,54 Ra_L^{1/4}$  para  $10^4 < Ra < 10^7$

Convección natural sobre pared horizontal fría y bajo pared caliente:  $Nu_L = 0,27 Ra_L^{1/4}$  para  $10^5 < Ra < 10^{11}$

Convección nat, alrededor de tubo horizontal: laminar ( $Ra_D < 10^9$ )  $Nu_D = 0,53 Ra_D^{1/4}$ , turbulento  $Nu_D = 0,13 Ra_D^{1/3}$

Convección natural alrededor de una esfera: laminar ( $Ra_D < 10^{11}$ ,  $\forall Pr$ )  $Nu_D = 2 + \frac{0,59 Ra_D^{1/4}}{\left(1 + \left(\frac{0,47}{Pr}\right)^{9/16}\right)^{4/9}}$ .

### Interior (chimenea)

Convección natural dentro de un conducto de altura L y radio hidráulico R, para gases ( $Pr \sim 1$ ):

$$Nu_R = \left[ \left(\frac{Ra}{C}\right)^m + \left(0,8 \frac{Ra^{1/4}}{C}\right)^m \right]^{1/m}. \quad \text{siendo } \overline{Ra} \equiv \frac{g\alpha(T - T_\infty)R^4}{\nu a L} < 10^5 \text{ y } C=16, m=-1 \text{ para conducto circular,}$$

$C=14, m=-1$  para conducto cuadrado de lado  $s=2R$ , y  $C=24, m=-2$  para ranura de ancho  $w=R$ .

## CAMBIADORES DE CALOR

Balances energéticos:  $\dot{Q} = \dot{m}_1 c_1 (T_{1,in} - T_{1,out}) = \dot{m}_2 c_2 (T_{2,out} - T_{2,in}) = KA \Delta T_{12,mean}$

Coefficiente global de transmisión (pared delgada):  $K = \frac{1}{\frac{1}{\eta_{fin1} h_1} + R_{f1} + \frac{L_{12}}{k_{12}} + \frac{1}{\eta_{fin2} h_2} + R_{f2}}$  ( $R_f$ , 'fouling resistance')

Diferencia de temperatura media logarítmica en cambiadores:  $\Delta T_{12,mean} = \Delta T_{LMTD} = \frac{(T_1 - T_2)_{x=L} - (T_1 - T_2)_{x=0}}{\ln \frac{(T_1 - T_2)_{x=L}}{(T_1 - T_2)_{x=0}}}$

Cálculo por el método NUT:  $N \equiv \frac{KA}{(\dot{m}c)_{\min}}, c \equiv \frac{(\dot{m}c)_{\min}}{(\dot{m}c)_{\max}}, \eta \equiv \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}|_{A \rightarrow \infty}} = \frac{\dot{m}c \Delta T_{in,out}}{(\dot{m}c)_{\min} \Delta T_{in,out}|_{\max}} = \eta(N, c)$

| Configuración                   | $\eta = \eta(N, c)$                               | $N = N(\eta, c)$                               |
|---------------------------------|---|--|
| Flujo coaxial a contracorriente | $\eta = \frac{1 - e^{-N(1-c)}}{1 - ce^{-N(1-c)}}$ | $N = \frac{1}{1-c} \ln \frac{1-c\eta}{1-\eta}$ |
| Flujo coaxial concurrente       | $\eta = \frac{1 - e^{-N(1+c)}}{1+c}$              | $N = \frac{\ln[\eta(1+c) - 1]}{1+c}$           |

---

Cambiador STHE de un paso por carcasa y  
pasos pares por tubos

$$\eta = \frac{2}{1+c+\sqrt{1+c^2}} \frac{1+e^{-N\sqrt{1+c^2}}}{1-e^{-N\sqrt{1+c^2}}}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \ln \frac{\frac{2}{\eta} + \sqrt{1+c^2} - (1+c)}{\frac{2}{\eta} - \sqrt{1+c^2} - (1+c)}$$

Flujo cruzado con un solo paso

$(\dot{m}c)_{\min}$  – mezclado,  $(\dot{m}c)_{\max}$  – no-mezclado

$$\eta = 1 - e^{-\frac{\exp(-cN)-1}{c}}$$

$$N = -\frac{\ln[c \ln(1-\eta)+1]}{c}$$

Flujo cruzado con un solo paso

$(\dot{m}c)_{\min}$  – no-mezclado,  $(\dot{m}c)_{\max}$  – mezclado

$$\eta = \frac{1}{c} \left( 1 - e^{1-c[1-\exp(-N)]} \right)$$

$$N = -\ln \left[ 1 + \frac{\ln(1-c\eta)}{c} \right]$$

Cambiadores con  $c=0$   
(i.e. de cambio de fase)

$$\eta = 1 - e^{-N}$$

$$N = -\ln(1-\eta)$$

---