



Universidad Politécnica de Madrid

TESIS

HIDROSTÁTICA DE LA ZONA FLOTANTE

por

Isidoro Martínez Herranz

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos

Madrid, Febrero 1978.

Esta TESIS DOCTORAL fue preparada por D. ISIDORO MARTÍNEZ HERRANZ en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aero_náuticos de la Universidad Politécnica de Madrid para la obtención del grado de DOCTOR EN CIENCIAS AERONÁUTICAS. - Fue dirigida por el Catedrático de Aerodinámica de dicha Escuela Dr . D. IGNACIO DA RIVA DE LA CAVADA.

RESUMEN

El comportamiento de masas líquidas en ingravidez es sorprendente; su estudio, complicado. Desde el siglo pasado se viene estudiando de un modo teórico el comportamiento de masas líquidas aisladas (principalmente impulsado por la astrofísica) y el de masas líquidas mantenidas entre dos superficies sólidas o "zonas flotantes" (impulsado por la tecnología de purificación de metales semiconductores por crecimiento cristalino).

A primeros de los años 70 y en el marco de las posibilidades que se abrían en Europa para la experimentación en ingravidez con el proyecto de laboratorio espacial SPACELAB, el Profesor Da Riva se interesó en el estudio de las zonas líquidas flotantes. Al finalizar mis estudios de ingeniería en 1975 y habiendo ya trabajado más de un año bajo su dirección, pasé a colaborar en estas investigaciones.

El trabajo en estos dos años y medio ha sido importante: producción de una película documental sobre el comportamiento de las zonas flotantes (Febrero 76), presentación de un artículo en el 2º Simposium de Ciencia de los Materiales en el Espacio (Italia, Abril 76), presentación de un artículo en la XX Asamblea Plenaria de la COSPAR (Israel, Junio 77), conferencias, etc.

El campo que abarcan estos estudios es muy amplio: hidrostática de las zonas flotantes, movimientos forzados, movimientos libres, experimentación en ingravidez, simulación en tierra,

etc. Algunas importantes conclusiones derivadas del análisis de la hidrostática (equilibrio y estabilidad estática) han dado origen a esta Tesis, en donde se ha tratado de completar dichos hallazgos con un estudio más ordenado y metódico de la hidrostática de las zonas flotantes.

Si hubiera que señalar el logro más importante que presenta esta Tesis, apuntaríamos que tal vez sea el de mostrar que no era acertado el criterio de estabilidad de las formas no cilíndricas (en particular la zona catenoide) que se suponía antes.

Estos estudios se continuarán y tratarán de proporcionar una teoría que sirva para la interpretación de los experimentos que se van a realizar en la Primera Misión Spacelab (1980) y que permita asesorar a los utilizadores de zonas flotantes a la par que profundizar en el conocimiento de la mecánica de líquidos.

AGRADECIMIENTO

Deseo manifestar mi agradecimiento a los miembros del Laboratorio de Aerodinámica y -Mecánica de Fluidos (LAMF) de esta Escuela porque con su continuo ejemplo han hecho más fácil este trabajo.

La Comisión Nacional de Investigación del Espacio, con su generosa ayuda material, ha hecho posible estas investigaciones.

ÍNDICE

RESUMEN	i
AGRADECIMIENTO	iii
ÍNDICE	iv
INTRODUCCIÓN	1
Cap. 1.- CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA	
FLOTANTE ENTRE DOS DISCOS COAXIALES	3
1.1. Hipótesis generales	4
1.2. Planteamiento matemático	5
- Método de la curvatura	5
- Método variacional	7
1.3. Soluciones exactas.....	9
1.4. Solución exacta para zonas no giratorias y en	
ingravidez	10
- Expresión analítica de la superficie	15
1.5. Solución aproximada para zonas casi cilíndricas.	19
- La zona cilíndrica	19
- Deformación por exceso de volumen de líquido..	20
- Deformación por gravedad axial	23
- Deformación por gravedad transversal	24
Nota anexa	27
Cap. 2.- ESTABILIDAD ESTÁTICA DE LA CONFIGURACIÓN DE EQUILI-	
BRÍO DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE ENTRE DOS DISCOS	
COAXIALES	29
2.1. Introducción	30
2.2. Planteamiento	30
2.3. Capacidad de una zona en reposo	31
- Cálculo del volumen máximo	34
- Cálculo del volumen mínimo	34

2.4. Análisis estático de la estabilidad de una zona en reposo.....	41
2.5. Puntualizaciones sobre ciertos casos particulares	50
- Límite de estabilidad de las zonas cilíndricas en reposo	55
- Límite de estabilidad de las zonas catenoides.	59
2.6. Formulación variacional de la estabilidad de una zona líquida flotante. Caso general	61
2.7. Efecto de la rotación sobre la estabilidad de las zonas cilíndricas	62
CONCLUSIONES	67
REFERENCIAS.....	68
APÉNDICE 1	69
APÉNDICE 2	71
PALABRAS CLAVE	72

LISTA DE SÍMBOLOS

Número de Bond: $C = 2 \omega^2$.

D , Diámetro de los discos soporte.

E , Energía (de presión más de superficie).

Número de Ekman: $E = V/\Omega R^2$.

G , Aceleración gravitatoria o inercial.

L , Longitud de la zona.

P , Presión absoluta.

R , Radio de los discos soporte.

T , Energía cinética.

U , Energía potencial.

V , Volumen de líquido en la zona.

a , Radio adimensional de los discos soporte: $a = R/L$.

b , Parámetro de la familia de catenoides definida en (23)

Cap. 2°.

c , Curvatura local adimensionalizada con la longitud de la zona.

e , Energía adimensional reducida (ver Tabla 1.1).

g , Aceleración de la gravedad (o inercial) adimensional:

$$g = PGL^2/\sigma$$

m , Parámetro definidor de la curva de la sección meridiana, definido en (17) Cap. 1.

Modo azimutal definido en (35) Cap. 2.

n , Modo longitudinal definido en (35) Cap. 2.

- p , Presión relativa en el origen: $p = (P_0 - P_a) L/\sigma$
- r , Radio de la superficie de una zona adimensionalizado con L .
- s , Superficie adimensional reducida (ver Tabla 1.1).
- t , Tiempo adimensionalizado con Ω^{-1}
- u , Velocidad radial adimensionalizada con ΩR .
- v , Velocidad azimutal adimensionalizada con ΩR .
- Volumen adimensional de la zona: $v = V/L^3$.
- V , Volumen adimensional reducido (ver Tabla 1.1).
- w , Velocidad longitudinal adimensionalizada con ΩR .
- x , Coordenada longitudinal adimensionalizada con L .
- X , Coordenada adimensional longitudinal reducida (ver Tabla 1.1) .
- y , Coordenada transversal adimensionalizada con L .
- y , Coordenada adimensional transversal reducida (ver Tabla 1.1).
- z , Coordenada longitudinal adimensionalizada con L .
- Ω , Velocidad angular de rotación de la zona.
- a , Parámetro definidor del tipo de curva meridiana (ver Tabla 1.1).
- β , Sobrepresión definida en (41) Cap. 1.
- Y , Ángulo de la tangente con el eje.
- ε , Parámetro pequeño según definición (43) ó (53) Cap. 1.

- η , Deformación respecto al cilindro según definición (38) ó (54) Cap. 1 ó (35) Cap. 2.
- θ , Ángulo de contacto sólido-líquido-gas. Coordenada azimutal .
- λ , Multiplicador de Lagrange (en nuestro caso coincide con la presión adimensional).
- ν , Viscosidad cinemática del líquido: $V = \gamma/p$.
- ξ , Separación respecto al cilindro: $\xi = (r-1)/\sqrt{\epsilon}\tau/2$.
- ρ , Densidad del líquido. Deformación respecto al cilindro, definido en (49) Cap, 1.
- σ , Coeficiente de tensión superficial líquido-gas.
- τ , Tiempo adimensional ampliado: $\tau = t/\epsilon$.
- Φ , Función de Euler definida en (8) Cap. 1.
- φ , Parámetro generador de las curvas meridianas (ver Tabla 1.1) .
- ω , Velocidad de rotación adimensional: $\omega = \sqrt{(\rho\Omega^2L^3)/\sigma}$

INTRODUCCIÓN

Se va a tratar aquí del análisis del equilibrio y la estabilidad de las zonas líquidas mantenidas en ingravidez entre dos discos coaxiales, basándonos en la teoría de la tensión superficial desarrollada por Young y Laplace a finales del siglo XVIII.

Este análisis fue iniciado ya por Lord Rayleigh a finales del siglo pasado (en Alemania también se trabajó en este tema) con el estudio de la estabilidad de chorros cilíndricos, pero no fue sino a partir de los años 50 cuando empezaron a proliferar artículos sobre las zonas líquidas flotantes. Desgraciadamente la gravedad enmascara los ensayos realizados con zonas líquidas en la tierra. Plateau, a mediados del siglo pasado, ideó la técnica del baño isocoro o de flotabilidad neutra, que también se conoce bajo su nombre. La sola belleza de estos experimentos le merecieran ya suficientes honores si no se aunase a un profundo estudio sobre las formas de las superficies libres de equilibrio que nosotros no hemos tratado más que de clasificar y resumir en la primera parte de esta obra.

La técnica de simulación de ingravidez de Plateau, con ser la más antigua, es la mejor, pese a que apenas si sirve para estudios dinámicos. Otras técnicas utilizadas: suspensión electrostática, suspensión acústica, etc., imponen tales limitaciones (debidas principalmente al gradiente del campo que oponen al gravitatorio) que su uso es escaso. La ingravidez conseguida en torres de caída libre dura demasiado poco para ser aprovechable.

Es con el vuelo parabólico de aviones (unos 20 segundos), con el uso de cohetes estratosféricos (unos 20 minutos) y, sobre todo, - con las inigualables condiciones del vuelo orbital, con lo que - ha sido posible una experimentación minuciosa y apropiada.

Los primeros ensayos con zonas líquidas flotantes en - condiciones orbitales fueron llevados a cabo en el laboratorio - espacial Skylab IV (1974), estando previsto un intenso programa de ensayos a bordo del Spacelab I para 1980, en el que va a participar este centro (LAMF) realizando una serie de experimentos sobre las formas de equilibrio, los límites de estabilidad y la dinámica interna de zonas líquidas flotantes.

CAPITULO 1

CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE

ENTRE DOS DISCOS COAXIALES

1. CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE ENTRE DOS DISCOS COAXIALES.

1.1. HIPÓTESIS GENERALES

Se considera una zona líquida comprendida entre dos discos coaxiales y rodeada de un gas de densidad mucho menor que la del líquido y que se supondrá despreciable frente a ésta.

Las propiedades de la superficie de separación [1] se consideran uniformes.

Salvo en el apartado 1.5 en que se tiene en cuenta el efecto de microgravedad transversal, a lo largo de todo el estudio, se supondrá que las acciones son axilsimétricas; es decir, que, tanto las condiciones de contorno, como las fuerzas másicas actuantes, son las mismas en todo plano meridiano. Basándonos en esta hipótesis, supondremos que la forma de la superficie de equilibrio es, así mismo, axilsimétrica.

La zona puede estar sometida a una velocidad de giro - uniforme alrededor del eje, ya que, en régimen estacionario, equivaldría a un movimiento como sólido rígido.

El ángulo de contacto sólido-líquido-gas, θ , es constante para cada pareja sólido-líquido.

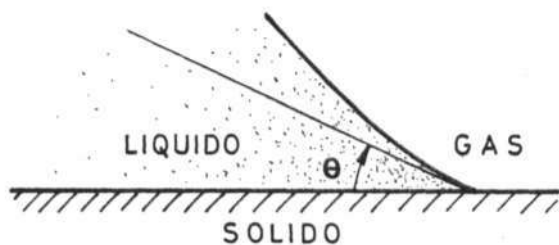


Fig. 1.1. Ángulo de contacto sólido-líquido-gas

En este estudio de las formas de equilibrio, no se tienen en cuenta la estabilidad, sino la posibilidad de que pueda existir equilibrio bajo las condiciones prescritas.

La Fig. 1.2 muestra esquemáticamente la configuración de la zona y sus parámetros característicos.

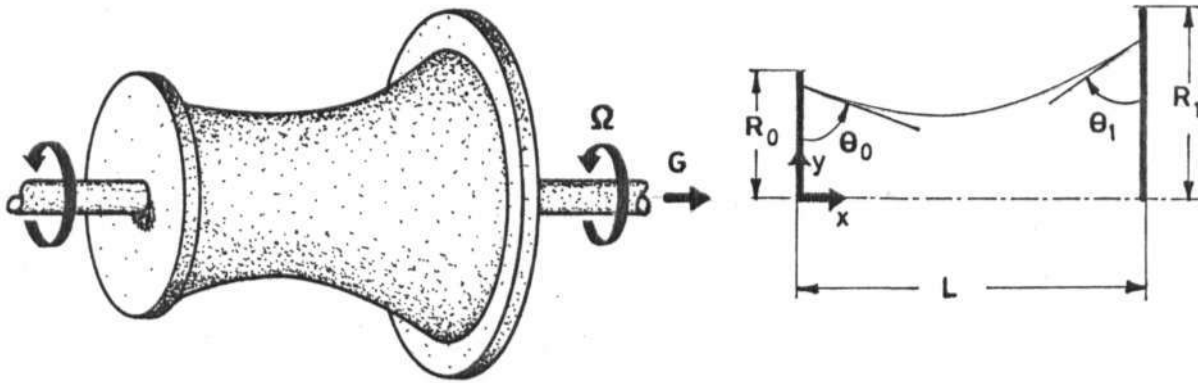


Fig. 1.2. Esquema de una zona flotante.

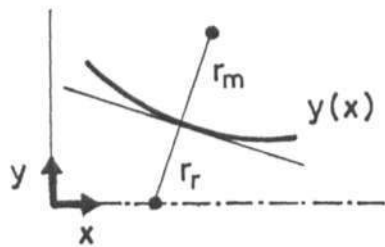
1.2. PLANTEAMIENTO MATEMÁTICO.

Se pueden seguir dos procedimientos:

Método de la curvatura

Expresando la condición de equilibrio local de presiones (ecuación de la hidrostática) en la superficie de separación líquido-gas obtenemos la ecuación diferencial que gobierna la forma de equilibrio; esto es: curvatura total proporcional al salto de presiones de uno a otro fluido.

En la Fig. 1.3. se da un esquema para el cálculo de la curvatura total en superficies de revolución.



$$\frac{1}{r_m} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{r_r} = \frac{-1}{y(1+y'^2)^{1/2}}$$

$$c = \frac{1}{r_m} + \frac{1}{r_r}$$

Fig. 1.3. Cálculo de la curvatura total en superficies de revolución.

La ecuación que resulta es la siguiente:

$$\underbrace{\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}}}_{\text{curvatura total}} + \underbrace{\omega^2 y^2}_{\text{efecto inercial}} + \underbrace{gx}_{\text{efecto gravitatorio}} + \underbrace{p}_{\text{caída de presión desde el origen a la atmósfera}} = 0 \quad (1)$$

siendo $y(x)$ la sección meridiana de la superficie de equilibrio,

$\omega = \sqrt{\frac{\rho \Omega^2 L^3}{2\sigma}}$ la relación entre la frecuencia del giro y una frecuencia característica, g la relación entre la presión hidrostática y la presión capilar, y p la relación entre la diferencia de presión desde el punto origen a la atmósfera circundante y la presión ca-

pilar.¹

Completan el planteamiento matemático del problema, las condiciones en los dos límites, que son:

$$\dagger \quad g = \frac{\rho GL^2}{\sigma}, \quad p = \frac{(P_o - P_a)L}{\sigma}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{una de estas dos} \left\{ \begin{array}{l} y|_{x=0} = a_0 = \frac{R_0}{L} \\ y'|_{x=0} = -\text{ctg}\theta_0 \end{array} \right\} \text{ en una placa} \\
 \\
 \text{y otra de estas dos} \left\{ \begin{array}{l} y|_{x=1} = a_1 = \frac{R_1}{L} \\ y'|_{x=1} = \text{ctg}\theta_1 \end{array} \right\} \text{ en la otra}
 \end{array} \right\} (2)$$

según que el líquido llegue o no al borde del disco, en cada caso. Normalmente será $\theta_0 = \theta_1$. Para determinar la forma de equilibrio es necesario, además, saber de antemano el volumen de líquido contenido:

$$\frac{V}{L^3} = \pi \int_0^1 y^2 dx . \quad (3)$$

Método variacional

La simplicidad del método anterior, radica en que el cálculo de la curvatura local y su expresión en un sistema de coordenadas fijo son muy sencillos. Para configuraciones no axilsimétricas, el análisis habría de hacerse en coordenadas curvilíneas intrínsecas [2] y su tratamiento resulta inabordable.

En cambio, el método variacional nos sirve en cualquier caso, y, pese a que las dificultades inherentes a la no-axilsimetría po desaparecen, este último método nos facilita un tratamiento más tipificado.

Se trata, simplemente, de establecer que el potencial cinético del sistema ha de ser extremal (principio de Hamilton de la mecánica clásica de sistema conservativos).

$$T - U = \text{extremal}, \quad (4)$$

siendo T y U las energías cinética y potencial, respectivamente, y que se calculan con las *formulas*

$$\frac{T}{\sigma L^2} = \frac{\pi}{2} \omega^2 \int_0^1 y^4 dx, \quad (5)$$

$$\frac{U}{\sigma L^2} = 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1 + y'^2} dx - \pi g \int_0^1 x y^2 dx. \quad (6)$$

Teniendo en cuenta que el volumen ha de ser dato,

$$\frac{V}{L^3} = \pi \int_0^1 y^2 dx, \quad (7)$$

podemos construir la función de Euler, Φ , en la forma

$$\int_0^1 \phi dx = \frac{T-U}{\sigma L^2} + \lambda \frac{V}{L^3}, \quad (8)$$

y la ecuación de Euler,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) = 0, \quad (9)$$

que nos dará la ecuación diferencial de segundo grado (1), resultando que A, el multiplicador de Lagrange, coincide con p.

1.3. SOLUCIONES EXACTAS

Como es obvio, no existe solución general para la ecuación diferencial (1), y la única manera de obtener la solución para un problema concreto es a base de cálculo numérico, presentándose, en cualquier caso, numerosos problemas de estabilidad y convergencia; algunos de estos resultados pueden encontrarse en la Ref.[3].

Uno de los grandes problemas en el cómputo numérico es que se ha de trabajar con curvaturas de funciones múltiples (no unívocas), ya que, como se aprecia en el ejemplo de la Fig. 1.4, unas mismas placas, con unas mismas condiciones en los límites, y un mismo volumen, pueden dar lugar, cuando menos, a dos soluciones distintas.

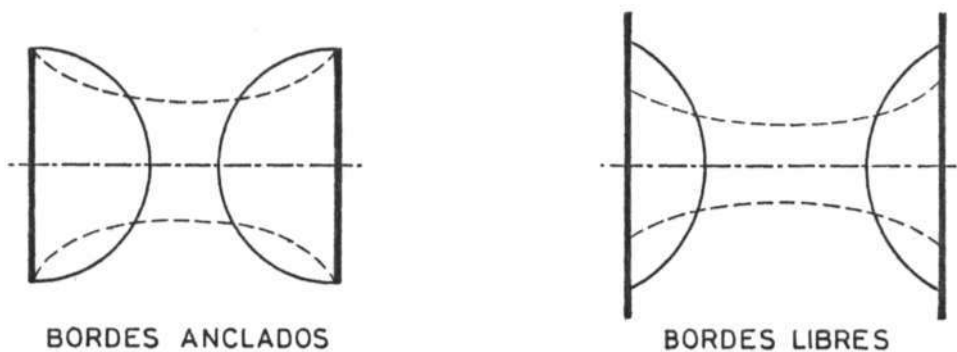


Fig. 1.4. Ejemplo de la no unicidad de la forma de equilibrio.

Cumpliendo ciertas hipótesis restrictivas, llegamos a soluciones analíticas sencillas entre las que cabe mencionar el

cilindro, la esfera, la catenoide, la onduloide y la nodoide.

Con la gravedad actuando axialmente no se conocen soluciones analíticas, así que, para profundizar algo en este estudio, no la consideraremos actuando nada más que en el apartado 1.5. - Aún así, la única solución analítica conocida con la zona en rotación es el cilindro; las demás conducen a integrales hiperelípticas, por lo que relegamos también al apartado 1.5 su efecto, y pasamos a estudiar las. soluciones exactas para zonas líquidas flotantes, no giratorias, en ingravidez.

1.4. SOLUCIÓN EXACTA PARA ZONAS NO GIRATORIAS Y EN INGRAVIDEZ

El problema planteado se reduce a la ecuación diferencial adimensional

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}} + p = 0 \quad , \quad (10)$$

con las condiciones de contorno

$$y \left\{ \begin{array}{l} y|_{x=0} = a_0 \\ y'|_{x=0} = -\text{ctg} \theta_0 \\ y|_{x=1} = a_1 \\ y'|_{x=1} = \text{ctg} \theta_1 \end{array} \right. \quad (11)$$

y el volumen conocido

$$\frac{V}{L^3} = v = \pi \int_0^1 y^2 dx \quad (12)$$

En esta formulación aparece un parámetro interno, p , que, una vez resuelta la ecuación diferencial (10) cumpliéndolas condiciones en los límites prescritas, (11), se determina con ayuda de la ecuación (12).

El problema, así planteado, es muy difícil de manejar, por lo que se optó por atacarlo del modo siguiente:

- eliminado el parámetro p de la ecuación diferencial, mediante un cambio de escala en las coordenadas
- calculando la curva $y(x)$ "desde menos infinito a mas infinito"; es decir, no imponiendo las condiciones de contorno en los discos
- buscando la porción de curva que satisface nuestras condiciones particulares en los límites
- obteniendo la verdadera magnitud de la zona a partir del valor del volumen de líquido confinado.

Este es el método más intuitivo, y, pese a que la formulación es la más adecuada para el cómputo numérico, vamos a seguir una variante, con la única ventaja de que las representaciones gráficas dan una visión de conjunto más clara.

Si consideramos la sección meridiana de la superficie de equilibrio, $y(x)$, como una porción de la solución general (des-

de menos infinito a mas infinito) de la ecuación diferencial sin condiciones límite ("sin discos"), y nos ceñimos al estudio de estas curvas "continentes" (que contienen la solución), veremos que se trata de funciones periódicas.

Para ello, integramos una vez la ecuación diferencial

(10) (como se hará después), y representamos la variación de $y'(x)$ en función de $y(x)$ (plano de las fases), observando que se trata de curvas cerradas; es decir, cíclicas (salvo en el caso $p = 0$, en que sólo hay un mínimo). Las funciones $y(x)$ son, además de periódicas, simétricas, por lo que basta conocer un semiperiodo para su completa determinación.

Tomemos el origen del eje x en la intersección del plano ventral (donde se presenta un máximo) con el eje de revolución. Como queda dicho, sólo no es válido para $p = 0$, pero este caso es muy sencillo de estudiar aparte,

Hagamos un cambio de escala de tal forma que la cota ventral (el valor máximo de $y(x)$,

y_m), sea la unidad.

El problema queda en la forma siguiente:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1+y'^2)^{1/2}} + p y_M = 0, \quad (13)$$

$$y \Big|_{x=0} = 1, \quad (14)$$

$$y' \Big|_{x=0} = 0. \quad (15)$$

Al carecer de término en X, la ecuación diferencial (13) es integrable una vez. Sea γ el ángulo que la tangente a la curva $y(x)$ forma con el eje X; se tendrá

$$y' = \operatorname{tg} \gamma \quad 1 + y'^2 = 1/\cos^2 \gamma \quad , \quad (16)$$

y la ecuación (13) pasará a ser

$$-\frac{1}{y} \frac{d}{dy}(y \cos \gamma) + p y_M = 0 \quad , \quad (17)$$

que, integrada con las condiciones (14) y (15) nos da

$$\cos \gamma = \frac{p y_M}{2} \left(y - \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{y} \quad . \quad (18)$$

Esta ecuación representa dos tipos de curvas: unas que no cortan al eje y (el coseno no llega nunca a anularse, véase - Fig. 1.5), y otras que sí llegan a cortar. Las primeras se mueven desde $y = 1$ hasta $y = \frac{2}{p y_M} - 1$. Las segundas van desde $y = 1$ hasta $y = \sqrt{1 - \frac{2}{p y_M}}$. Pero el intervalo de validez de la fórmula (18) es $0 < \gamma < -\pi/2$, que la ecuación (1) se obtuvo suponiendo que el elemento de superficie dejaba el líquido en la parte próxima al eje. A partir de ahí, el líquido queda por "fuera" de la superficie (la parte más alejada al eje), y habremos de poner $-p$ en lugar de p , para poder seguir construyendo la curva desde $y = \sqrt{1 - \frac{2}{p y_M}}$ hasta $y = \frac{2}{p y_M} - 1$.

Llamando m a este valor mínimo (único parámetro de la solución)

$$m = \frac{2}{py_M} - 1 \quad , \quad (19)$$

se han representado en la Fig. 1.5 las distintas curvas del plano

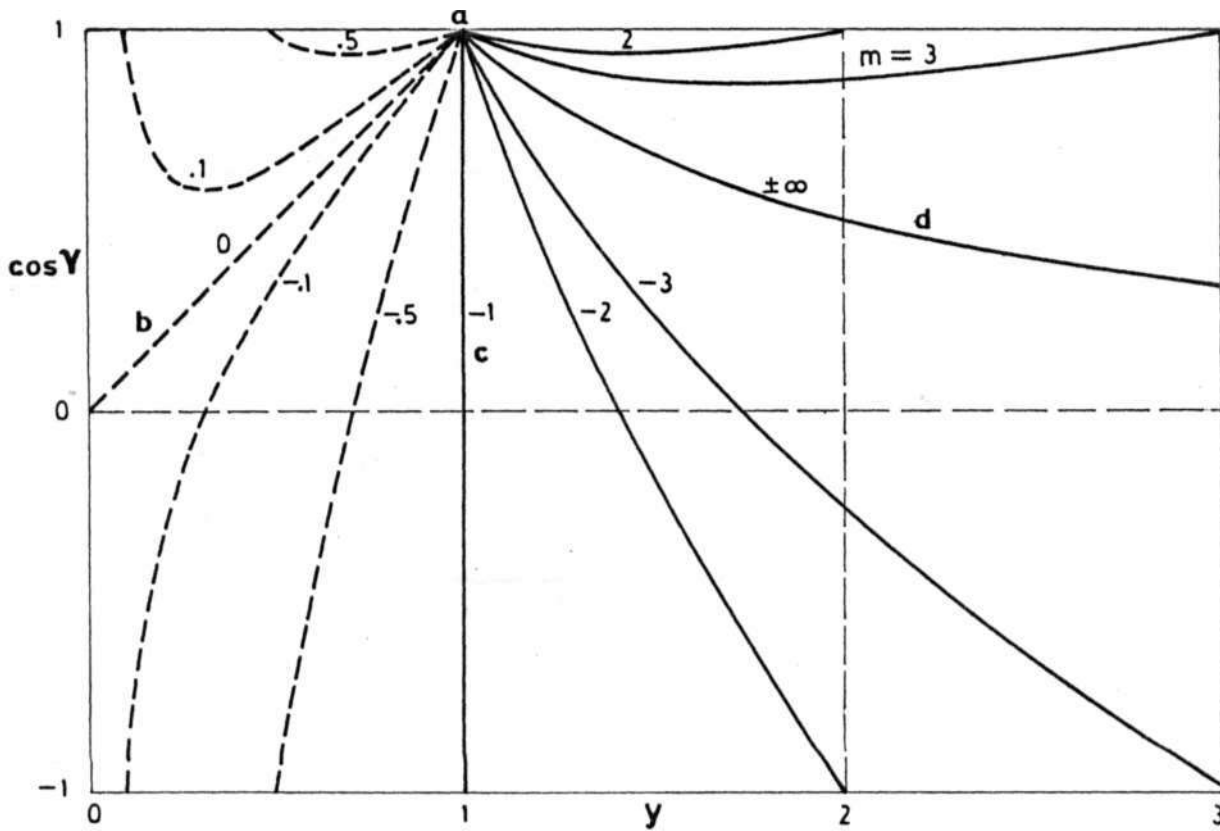


Fig. 1.5. Plano de las fases del problema (13)-(14)-(15).

----- tomando como unidad la y máxima

----- tomando como unidad la y mínima

a, Punto correspondiente a la forma cilíndrica

b, Curva divisoria correspondiente a la forma esférica

c, Curva divisoria correspondiente a la forma límite bidimensional

d, Curva divisoria correspondiente a la forma de catenoide.

de las fases del problema (13-14-15). Para obtener una visión más completa, se ha duplicado toda la representación, una vez dividiendo por la y máxima (como venimos diciendo), y otra dividiendo por la y mínima.

Expresión analítica de la superficie

Despejando y' de (18) teniendo en cuenta (16), obtenemos.

$$y' = -\sqrt{\left(\frac{1+m}{y + \frac{m}{y}}\right)^2 - 1} \quad , \quad (20)$$

esto es ,

$$x = - \int_1^y \frac{y^2 + m}{\sqrt{(y^2 - 1)(y^2 - m^2)}} dy \quad . \quad (21)$$

Esta es una cuadratura elíptica, y puede ponerse en función de las integrales elípticas de primera y segunda especie, F y E ,

$$F = \int_0^{\varphi} (1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi \quad E = \int_0^{\varphi} (1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \varphi)^{1/2} d\varphi, \quad (22)$$

con el cambio de variables

$$\text{sen}^2 \alpha = 1 - m^2 \quad \text{sen}^2 \varphi = \frac{1 - y^2}{1 - m^2} \quad . \quad (23)$$

La solución es

$$x = \cos \alpha F(\varphi, \alpha) + E(\varphi, \alpha) \quad , \quad (24)$$

y el semiperiodo, X , vendrá dado por

$$\chi = \cos \alpha F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) + E\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) \quad . \quad (25)$$

En la Fig. 1.6 se ha representado la función $y(x)$ en un semiperiodo para varios valores del parámetro m .

Conviene tener también las expresiones del volumen y la superficie desde la sección ventral a una genérica

$$v = \pi \int_0^x y^2 dx = \pi \int_y^1 y^2 \frac{y^2 + m}{\sqrt{-(y^2 - 1)(y^2 - m^2)}} dy \quad , \quad (26)$$

$$s = 2\pi \int_0^x y \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\pi \int_y^1 \frac{(1 + m)y^2}{\sqrt{-(y^2 - 1)(y^2 - m^2)}} dy \quad , \quad (27)$$

que resultan ser

$$v = \frac{\pi}{3} [\sin^2 \alpha \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} - \cos^2 \alpha F(\varphi, \alpha) + (2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha + 2) E(\varphi, \alpha)] \quad , \quad (28)$$

$$s = 2\pi(1 + \cos \alpha) E(\varphi, \alpha) \quad . \quad (29)$$

Puesto que se han duplicado algunas representaciones tomando como unidad el valor mínimo de la función (en lugar del máximo), en la Tabla 1.1 se incluyen los resultados que se obtendrían, con el fin de que este análisis resulte más completo (aparte de la fiabilidad que supone disponer de un método de comprobación de resultados).

Para pasar de estas expresiones-reducidas a los valores

Tabla 1.1. Formulario resumen de las formas de equilibrio

Expresión paramétrica de la sección meridiana de la superficie de equilibrio:

$$a) \quad x = |\cos \alpha F(\varphi, \alpha) + E(\varphi, \alpha)| \quad (30)$$

$$b) \quad x = \left| \frac{\cos \alpha [F(\pi/2, \alpha) - F(\varphi, \alpha) + E(\pi/2, \alpha) - E(\varphi, \alpha)]}{\cos \alpha} \right| \quad (31)$$

$$a) \quad y = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} \quad (32)$$

$$b) \quad y = \left| \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}}{\cos \alpha} \right| \quad (33)$$

Volumen encerrado hasta una sección genérica:

$$a) \quad v = \frac{\pi}{3} \left| \sin^2 \alpha \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} - \cos^2 \alpha F(\varphi, \alpha) + (2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha + 2) E(\varphi, \alpha) \right| \quad (34)$$

$$b) \quad v = \frac{\pi}{3} \left| -\sin^2 \alpha \sin \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi} - \cos^2 \alpha [F(\frac{\pi}{2}, \alpha) - F(\varphi, \alpha)] + (2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha + 2) [E(\frac{\pi}{2}, \alpha) - E(\varphi, \alpha)] / \cos^3 \alpha \right| \quad (35)$$

Superficie lateral hasta una sección genérica:

$$a) \quad s = 2\pi(1 + \cos \alpha)E(\varphi, \alpha) \quad (36)$$

$$b) \quad s = \frac{2(1 + \cos \alpha)[E(\pi/2, \alpha) - E(\varphi, \alpha)]}{\cos^2 \alpha} \quad (37)$$

Energía (de presión + de superficie) hasta una sección genérica:

$$a) \quad e = \frac{2}{1 + \cos \alpha} v + s \quad (38)$$

$$b) \quad e = \frac{2}{1 + \cos \alpha} v \cos \alpha + s$$

a), Valores a partir de la sección ventral reducidos con y_m . El tipo de curva viene dado por a , siendo $m = \cos \alpha$.

b), Valores a partir de la sección nodal, reducidos con y_m . El tipo de curva viene dado por a , siendo $m = 1/\cos \alpha$.

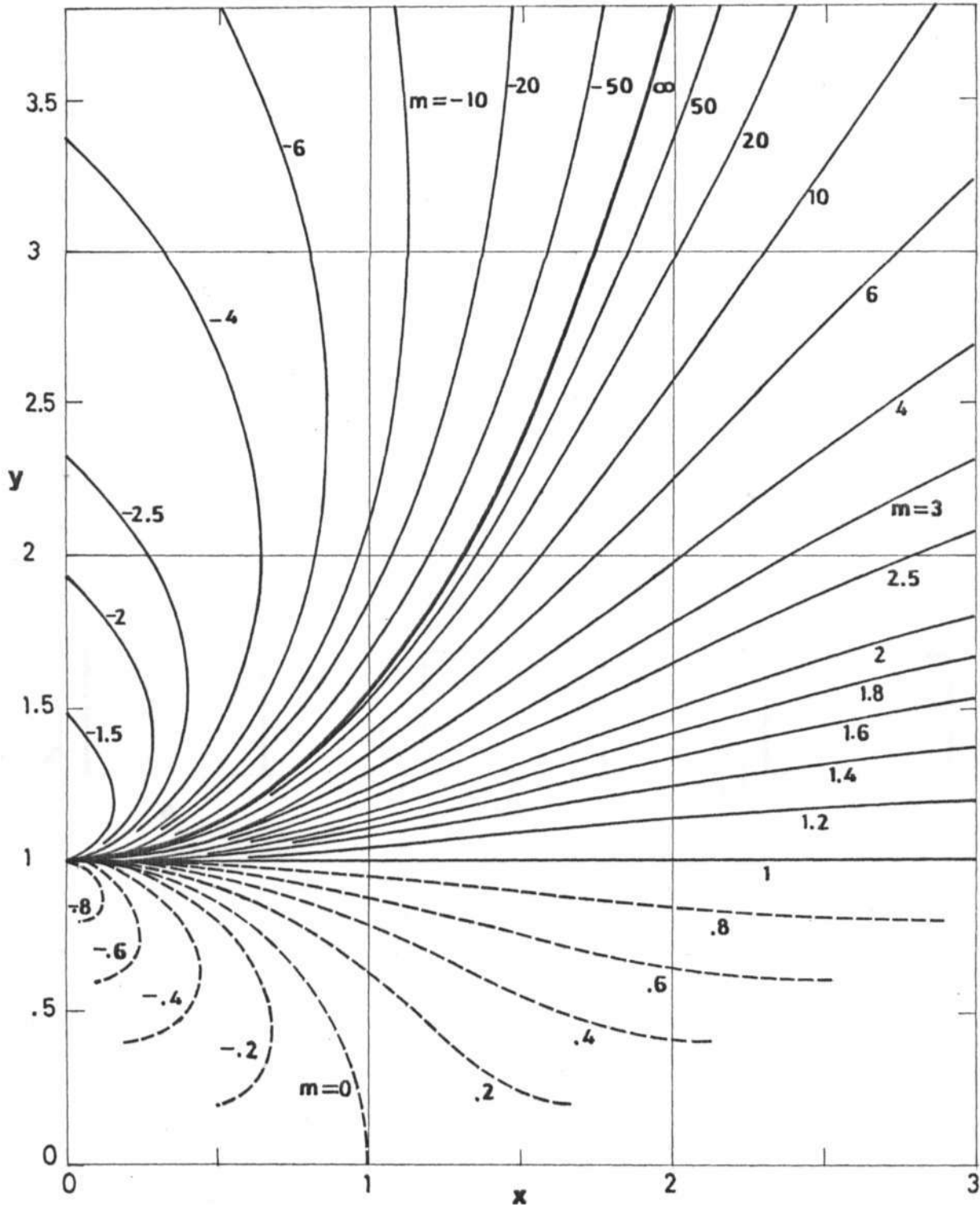


Fig. 1.6. Secciones meridianas de las superficies de revolución de curvatura constante, reducidas con el valor máximo (---) o con el mínimo (---). El valor del parámetro m coincide con el valor de la función en el extremo del semiperiodo.

de las magnitudes deseadas (esbeltez D/L , volumen V y energía E) hay que imponer la condición de escala, es decir, que en la realidad, la columna está comprendida entre $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

1.5. SOLUCIÓN APROXIMADA PARA ZONAS CASI CILINDRICAS

Sabemos que la superficie cilíndrica de revolución es una de las posibles formas de equilibrio de una zona flotante, incluso con rotación.

La zona cilíndrica

Una zona cilíndrica puede presentarse en los tres casos ideales siguientes (ver Fig. 1.7):

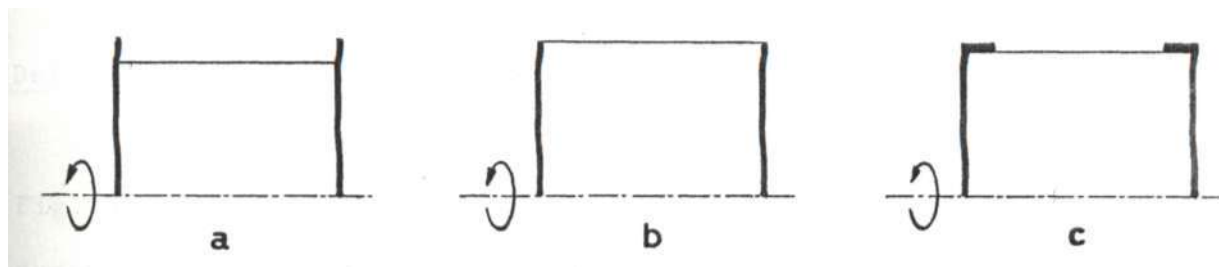


Fig. 1.7. Casos simples de zona cilíndrica.

a) Cuando el ángulo de contacto líquido-sólido-gas es de 90° . En este caso, para cualquier volumen, la zona será cilíndrica si el líquido no alcanza el borde. No importa si los discos son desiguales.

b) Cuando el ángulo de contacto es menor de 90° , (líquido que moja), existe un volumen de líquido para el cual, con ambos discos iguales, se formará una zona cilíndrica.

c) Para ángulos de contacto mayores de 90° , (líquido - que no moja), es necesario que los discos tengan reborde (ver - Fig. 1.7.c) para que pueda existir zona cilíndrica, la cual solo lo será para un volumen apropiado.

Puede darse, claro está, algún caso combinado de los - anteriores.

Ahora estamos interesados en obtener una expresión analítica sencilla de las formas casi cilíndricas. Esta desviación puede ser debida a muchas causas, de las cuales vamos a analizar las más comunes, separadamente, pues la linealidad del análisis (con las mismas condiciones en los límites), nos permitirá aplicar el principio de superposición.

Deformación por exceso de volumen de líquido

En las zonas cilíndricas normales (casos b y c de la - Fig. 1.7), una diferencia en volumen respecto al del cilindro produce una deformación en forma de huso o en forma de barril, según haya defecto o exceso de líquido, respectivamente. En cualquier - caso, si admitimos que la zona sigue siendo axisimétrica, podemos hacer uso de la ecuación (1), la cual, tomando

$$y(x) = a[1 + \varepsilon\eta(x)] \quad \text{con} \quad \varepsilon \ll 1 \quad , \quad (38)$$

y reteniendo solamente términos de orden ε , pasa a ser

$$\eta'' + \frac{1}{\alpha^2} \eta + \beta = 0 \quad , \quad (39)$$

siendo α el radio "modificado" por la rotación

$$\alpha = a(1 + 2\omega^2 a^3)^{-1/2}, \quad (40)$$

y ε la diferencia de presión respecto a la del cilindro, convenientemente escalada, de forma que la presión en el eje (es constante) sea

$$p = \frac{1}{a} - \omega^2 a^3 + \varepsilon a \beta \quad (41)$$

El parámetro de linealización, ε , es el exceso relativo de volumen de líquido en la zona

$$\varepsilon = \frac{V - \pi a^2}{\pi a^2} \quad (42)$$

La ecuación diferencial (39) con condiciones de contorno homogéneas (bordes anclados), tiene por solución

$$\eta = \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2\alpha} \cdot \operatorname{sen} \frac{1-x}{2\alpha}}{2\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{2\alpha} - \operatorname{cos} \frac{1}{2\alpha}} \quad (43)$$

El cálculo anterior no es válido si $\alpha = 1/2\pi$. En el capítulo siguiente se verá que ese es un límite de estabilidad, estando indeterminada la forma de la zona (en este análisis lineal).

La deformada, (43), es del tipo esperado, con valor máximo en mitad del intervalo. Para el manejo de zonas flotantes, es importante tener en cuenta esta deformación máxima, que, adimensionalizada como siempre con la longitud de la zona, podemos poner

$$y_M = a \left(1 + \frac{v - \pi a^2}{\pi a^2} \frac{1 - \cos \frac{1}{2\alpha}}{4 \sin \frac{1}{2\alpha} - 2 \cos \frac{1}{2\alpha}} \right) \quad (44)$$

En la Fig. 1.8 se presenta este resultado del análisis lineal junto con el valor exacto, calculado con ayuda de la ecuación (30).

Se han hecho los cálculos con $a = .5$ ($D/L = 1$), pero la influencia de a es despreciable (la pendiente) en el origen, por ejemplo, pasa de ser .763 para $D/L = 1$ a ser .865 para $D/L = .\mu$. Como el efecto de la rotación es similar a una reducción del valor de a (ver (40)), la rotación apenas modifica la forma de las zonas casi cilíndricas.

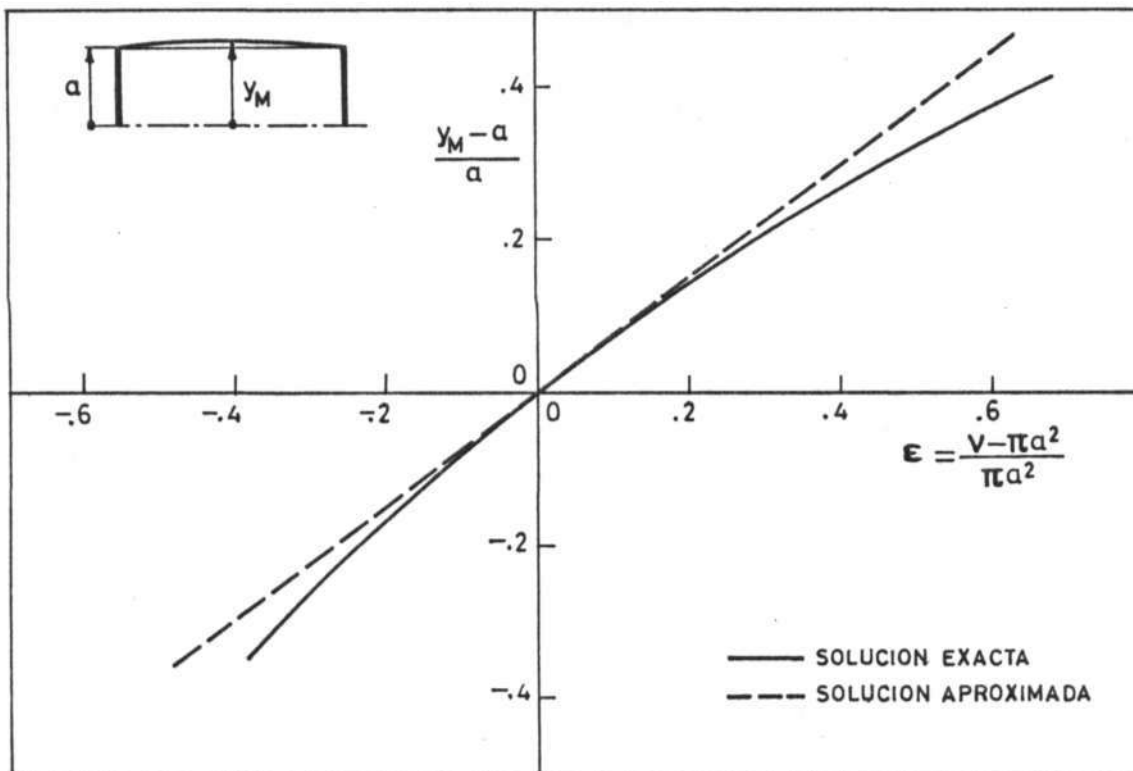


Fig. 1.8. Cota máxima de una zona con volumen ligeramente diferente al de una zona cilíndrica. Zona no giratoria, $a = .5$.

Deformación por gravedad axial

Consideremos una zona líquida en rotación, que, en ausencia de otros efectos más que la tensión superficial y las condiciones de mojado en los discos, tuviese forma cilíndrica. Es intuitivo que si la sometemos a un campo gravitatorio (o cualquier otra aceleración constante) en dirección axial, la zona se deformará, tomando el aspecto de ánfora (o de botella, si se trata del caso a) de la Fig. 1.7). Si la gravedad es pequeña, podemos suponer que la deformación es también pequeña, y ensayar soluciones, al igual que en el caso anterior, de la forma

$$y(x) = a[1 + \epsilon\eta(x)] \quad \epsilon \ll 1 \quad . \quad (45)$$

La ecuación (1) ya linealizada, se reduce a

$$\eta'' + \frac{1}{\alpha^2} \eta + x + \beta = 0 \quad , \quad (46)$$

donde α y β fueron introducidos en (40) y (41), y se ha tomado como parámetro de linealización la gravedad, de tal modo que se verifica

$$g = \epsilon a \quad . \quad (47)$$

A la ecuación (46) hay que añadir las condiciones de contorno apropiadas. Por ejemplo, para el caso de zona con bordes anclados, $\eta(0) = \eta(1) = 0$ y la condición de conservación del volumen $\int_0^1 \eta \, dx = 0$, hecho todo lo cual, resulta

$$\eta = \frac{\alpha^2}{2} \left(1 - 2x - \frac{\text{sen } \frac{1-2x}{2\alpha}}{\text{sen } \frac{1}{2\alpha}} \right) \quad (48)$$

El valor máximo se presenta en la sección

$$x \Big|_{y_M} = \frac{1}{2} \left(1 + 2\alpha \arccos \left(2\alpha \text{sen } \frac{1}{2\alpha} \right) \right) \quad (49)$$

La deformada, η , antisimétrica respecto a la sección central. En la Fig. 1.9 se representa la máxima cota y la sección en que se produce, ambas en función de la esbeltez de la zona, modificada por efecto de la rotación.

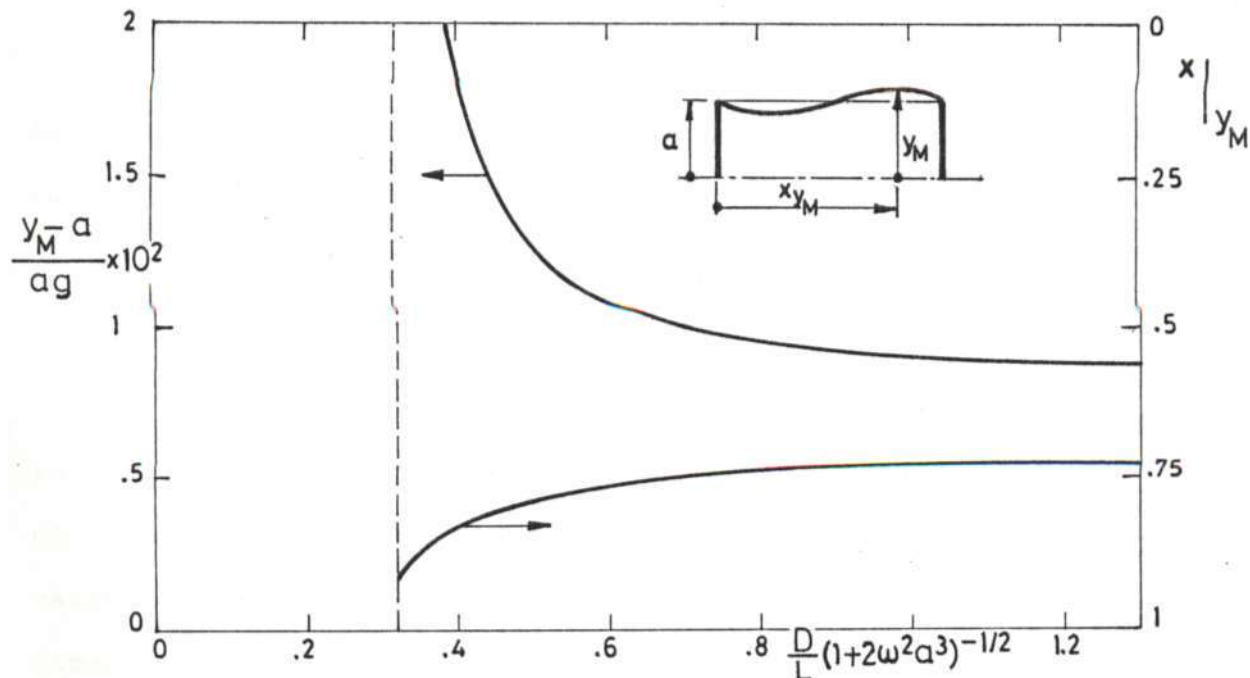


Fig. 1.9. Cota máxima de una zona inicialmente cilíndrica expuesta a una gravedad axial, y sección donde tiene lugar.

Deformación por gravedad transversal

Para poder tener en cuenta la deformación que produce

en una zona inicialmente cilíndrica, la acción de un campo gravitatorio cualquiera, supuesto de pequeña intensidad para poder linealizar y superponer el efecto de las componentes axial y transversal, nos falta analizar este último efecto. Obviamente, la forma resultante ya no va a ser axilsimétrica, sino que se comparará - en el sentido de la gravedad. La ecuación (1) ya no es válida. Posponemos hasta el capítulo siguiente la obtención de una ecuación similar para formas no axilsimétricas; aquí, introduciremos directamente la expresión de la curvatura total de una superficie casi cilíndrica (aproximación lineal). Sea la superficie

$$r(z, \varphi) = a[1 - \varepsilon \rho(z, \varphi)] \quad \varepsilon \ll 1 \quad , \quad (50)$$

la curvatura total es, aproximadamente, en coordenadas cilíndricas (r, φ, z) ,

$$\alpha = \varepsilon a \left(\rho_{zz} + \frac{1}{a^2} \rho_{\varphi\varphi} + \frac{1}{a^2} \rho \right) \quad . \quad (51)$$

La presión en el origen no variará, así que, puesto que la componente de la aceleración normal a la superficie varía con el $\cos \varphi$ (tomando como referencia la dirección y sentido de la gravedad), podemos escribir la ecuación linealizada del equilibrio - como

$$\rho_{zz} + \frac{1}{a^2} \rho_{\varphi\varphi} + \frac{1}{a^2} \rho + 2\omega^2 a \rho + \cos \varphi = 0 \quad , \quad (52)$$

donde se ha tomado como parámetro de linealización

$$\varepsilon = g \quad , \quad (53)$$

siendo ρ el valor adimensional de la componente transversal de la aceleración de la gravedad.

La ecuación (52) sugiere el desarrollo

$$\rho = \eta(z) \cdot \cos \varphi \quad , \quad (54)$$

que, introducido en (52) nos da

$$\eta'' + 1 = 0 \quad . \quad (55)$$

Imponiendo la condición de bordes anclados en los discos (la única configuración capaz de soportar cargas transversales), obtenemos la solución

$$\eta = \frac{z(1-z)}{2} \quad . \quad (56)$$

Nótese que no ha hecho falta imponer la conservación del volumen, por venir implícita en el desarrollo (54).

El valor de la cota máxima de la forma deformada es:

$$\eta_{\max} = \frac{1}{8} \quad . \quad (57)$$

NOTA ANEXA

Una vez finalizada la redacción de este trabajo se han encontrado un par de preguntas sin responder: ¿porqué no se estudia la presión? (apenas si aparece mencionada); ¿qué pasa si los discos soportes son de diámetros diferentes?.

Se ha apuntado a veces la posible utilización de zonas flotantes como medidores de presión relativa en las proximidades del cero (diferencias del orden de un pascal). Creemos que es más sencillo utilizar gotas para ese cometido.

Otros intereses se centran en el estudio de la desviación de la forma de la superficie libre aquí considerada, debido al efecto de las fuerzas moleculares de interacción sólido-líquido en los discos soporte, evaluada en términos de la "presión de separación" (disjoining pressure).

Incluso se ha anunciado ya que se van a hacer experimentos en el espacio con zonas flotantes mantenidas entre dos discos desiguales.

Todas estas consideraciones podrían haber merecido alguna explicación en el texto. Trataremos de suplir aquí esa posible deficiencia con estos dos comentarios:

Presiones: la presión, P , en una zona líquida en ingravidez y sin rotación es uniforme y vale

$$P_0 = P_a + \frac{4\sigma}{(1+m)D_m} \quad -\infty < m < +\infty, \quad (58)$$

siendo P_a la presión de la atmosfera circundante, σ el coeficiente de tensión superficial, m el parámetro que define el tipo de curva (Fig. 1.6), y D el diámetro de la zona en el plano medio entre los discos.

Discos desiguales: todas las formas posibles de la superficie libre siguen siendo las de la Fig. 1.6, sólo que el origen (el plano de simetría) ya no está en el plano medio entre los discos, sino más cerca del disco pequeño (el mínimo) o del disco grande (el máximo).

CAPITULO 2

ESTABILIDAD ESTÁTICA DE LA CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO DE
UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE ENTRE DOS DISCOS COAXIALES

2. ESTABILIDAD ESTÁTICA DE LA CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE ENTRE DOS DISCOS COAXIALES.

2.1. INTRODUCCIÓN

Se trata de dar una estimación de la estabilidad de las formas de equilibrio, obtenidas en el capítulo anterior, desde un punto de vista energético (probabilidad) y topológico (posibilidad) de una zona líquida flotante sujeta a las condiciones especificadas en el apartado 1.1. En otras palabras: el planteamiento del equilibrio (apartado 1.2) nos ha conducido a un conjunto de soluciones de entre las cuales tenemos que elegir la "verdadera" imponiendo la condición de "fenómeno natural", es decir, que siendo la solución accesible desde unas condiciones realizables, sea la de menor energía.

El fin que persigue este análisis es el de delimitar - las posibles configuraciones de equilibrio, estableciendo límites de estabilidad estática.

1.2. PLANTEAMIENTO

Empecemos, para no complicar la explicación, limitando estos primeros apartados, al caso de zonas con bordes anclados no sometidas a más acción que la tensión superficial.

El estado de reposo de una zona líquida flotante parece, a primera vista, que puede definirse como función de dos únicas variables adimensionales ; tomando como unidad la separación entre los discos, estas variables son:

- el radio de los discos
- el volumen de líquido en la zona.

Desgraciadamente, como ya se indicó en el capítulo anterior (ver Fig. 1.4) existen varias soluciones (en número finito) para el problema así planteado; es decir, la función $y(x,a,v)$ queda la curva generatriz de la superficie libre (de revolución) es multiforme.

El problema que vamos a analizar es el siguiente: para un cierto radio de los discos (impuesto a voluntad) ¿cómo se puede averiguar si existe alguna forma de equilibrio para un volumen dado? Y si existiesen varias posibilidades ¿cómo se podría averiguar cual se presentaría en un ensayo real?.

Los pasos que vamos a dar son, pues: delimitar el margen de volúmenes en los que "existe" configuración de equilibrio, y, dentro de este margen, acotar los valores que conducen a solución estable.

2.3. CAPACIDAD DE UNA ZONA EN REPOSO

Tomemos, hipotéticamente, una zona cilíndrica de radio a y volumen $v = \pi a^2$. Es intuitivo pensar que si extraemos líquido (por un orificio en un disco), la zona se irá estrangulando y llegará un momento en que se rompa, quedando dividido el líquido en dos partes separadas, una en cada disco. Llamaremos "volumen mínimo" de una zona, al volumen en la situación de rotura antes descrita.

En cambio, no es nada intuitivo el proceso de llenado partiendo de la zona cilíndrica ¿existirá un volumen máximo?. Si, ya que, al aumentar el volumen, va aumentando el ángulo del líquido en el borde y llegará un momento en que se desborde, mojando la superficie lateral e incluso la parte posterior del disco. Tomaremos como valor máximo de este ángulo, 180° (Fig. 2.1).

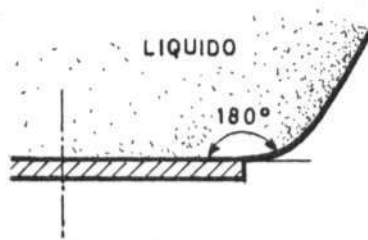


Fig. 2.1. Máximo ángulo considerado para delimitar la capacidad de una zona.

Si en lugar del criterio anterior, se toma el de $\theta=270^\circ$ ó cualquier otro, variaría el valor del volumen máximo, pero manteniendo siempre el mismo comportamiento.

Vemos, pues, que el límite superior del volumen de líquido que puede contener una zona no es difícil de calcular y no presenta particularidades notables, como se verá enseguida.

En cuanto a la limitación inferior (mínimo volumen) el caso es bastante diferente; el límite no viene en general impuesto por condiciones de "impenetrabilidad" (Fig. 2.2) como podría aventurarse basado en la limitación superior antes vista. Esta limitación es sólo válida para zonas muy compactas con ángulo de contacto sólido-líquido-gas nulo.

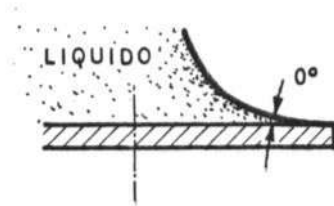


Fig. 2.2. Límite inferior del volumen contenido en una zona compacta de líquido que moja perfectamente.

Para zonas esbeltas el límite inferior no viene impuesto por este condicionante (valor inferior del ángulo en el borde), sino que el volumen pasa por un valor mínimo para un ángulo intermedio. Aún más, no existe solución de equilibrio con ángulos pequeños. En particular, para una relación $D/L = .22$, el volumen mínimo resulta ser el de la forma cilíndrica. Es necesario hacer constar que se trata de un mínimo relativo, ya que, por la periodicidad de las funciones manejadas, las soluciones son múltiples (en número finito) como se esquematiza en la Fig. 2.3.

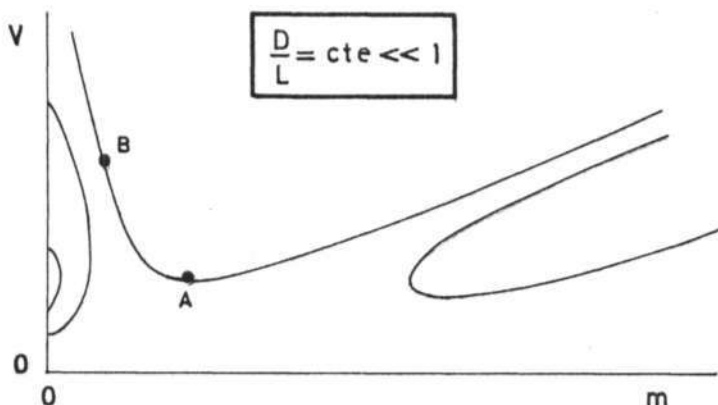


Fig. 2.3. Esquema de los diferentes volúmenes que pueden contener dos discos de diámetro D y separación L , con $D/L \ll 1$, en función del parámetro identificador de la curva meridiana, m . (Ver Fig. 2.5).

Como se demostrará posteriormente al estudiar la estabilidad, las curvas inferiores de la Fig. 2.3, son inaccesibles, por lo que tiene sentido calcular el punto A (Fig. 2.3) y asignarle el valor límite inferior de la capacidad de una zona flotante. Desgraciadamente, para zonas con $D/L < .5$, tampoco es accesible el punto A, pues existe una posición anterior, punto B, que marca el límite de estabilidad para esa esbeltez (en esa zona de valores de m , al ir extrayendo líquido, va aumentando la m).

De todos modos, vamos a calcular los límites superior e inferior analíticamente.

Cálculo del volumen máximo

Basándonos en la condición expresada anteriormente para determinar el volumen máximo, y con ayuda de la Fig. 1.6 y las fórmulas (30), (32) y (34) de la Tabla 1.1 (capítulo anterior) podemos determinar su valor para cada esbeltez. En efecto, la forma de equilibrio de esta situación será del tipo mostrado en la Fig. 2.4, donde se indica, asimismo, su obtención gráfica. Para el cómputo numérico, que no ofrece gran dificultad, hay que considerar la curva (en paramétricas) desde $\varphi = 0$ hasta $\varphi = \text{arc tg } \sqrt{-1/\cos \alpha}$, valor en el cual se presenta la tangente vertical (Fig. 1.6, Tabla 1.1-(30) y (32)).

Cálculo del volumen mínimo

Este caso es mucho más complicado, como vamos a ver al

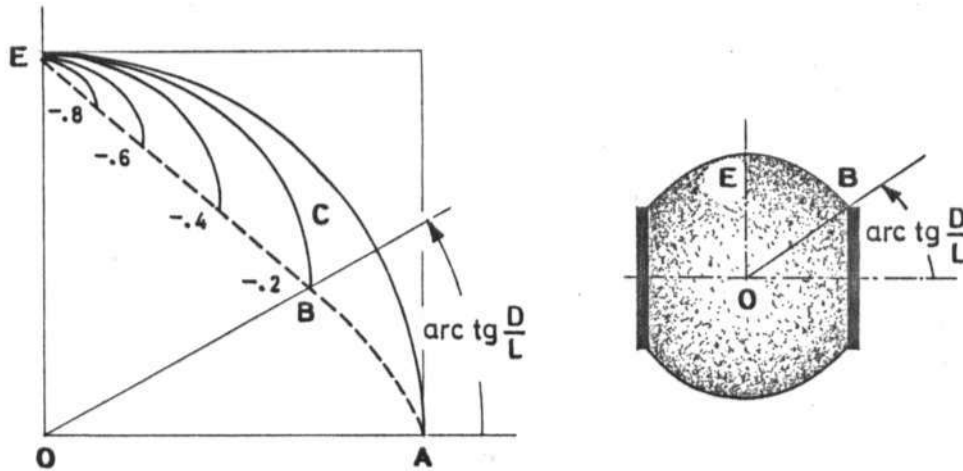


Fig. 2.4. Forma de equilibrio de volumen máximo para una esbeltez dada. La superficie libre de revolución (ECB), simétrica respecto al plano mitad (EO) es la definida por la recta OB de pendiente D/L y la curva ABE que marca la condición de ángulo en el borde $\theta = 180^\circ$.

plantear el problema.

Se desea conocer el valor del volumen mínimo que puede ser mantenido entre dos discos de diámetro D separados una distancia L , y para ello disponemos de las ecuaciones paramétricas reducidas (Tabla 1.1) de todas las posibles formas de la superficie de equilibrio. Llamando con la misma letra φ al valor de la variable en el extremo de la zona, el planteamiento matemático será, para $D/L > .22$, *

$$\frac{D}{L} = \frac{y}{x} = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}}{\cos \alpha [F(\pi/2, \alpha) - F(\varphi, \alpha)] + E(\pi/2, \alpha) - E(\varphi, \alpha)} \quad (1)$$

* El hecho de tomar $D/L > .22$ es para utilizar las fórmulas b) de la referida Tabla 1.1 y hacer la explicación más explícita. Para $D/L < .22$ el único cambio reside en tomar las ecuaciones a) de dicha Tabla,

$$\frac{V}{L^3} = v = \frac{v}{4x^3} = \frac{\pi}{12} \left\{ -\text{sen}^2 \alpha \text{sen} \varphi \cos \varphi \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha \text{sen}^2 \varphi} - \right. \\ \left. - \cos^2 \alpha [F(\pi/2, \alpha) - F(\varphi, \alpha)] + (2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha + 2) [E(\pi/2, \alpha) - \right. \\ \left. - E(\varphi, \alpha)] \right\} / \{ \cos \alpha [E(\pi/2, \alpha) - F(\varphi, \alpha)] + E(\pi/2, \alpha) - E(\varphi, \alpha) \}^{-3} \quad (2)$$

$$d(V/L^3) = 0 \quad . \quad (3)$$

Las condiciones (1) y (3) nos dan dos ecuaciones con dos incógnitas, α y φ , que sustituidas en (2) nos determinan el valor buscado del volumen. El hecho de trabajar con integrales elípticas y que la solución no sea única, introduce una dificultad notable, pero las representaciones gráficas ayudan grandemente (conviene trabajar con los desarrollos polinómicos de las integrales elípticas para evitar los ciclos de iteraciones con integrales de límites variables).

Si en lugar de utilizar la ecuación (1) utilizamos su diferencial,

$$d(D/L) = 0 \quad , \quad (4)$$

obtendremos una relación entre los parámetros α y φ , y las ecuaciones (1) y (2) nos definirán en forma paramétrica la solución general. Para obtener esta relación $J(\alpha, \varphi) = 0$ (esta función se llama J para identificarla con el Jacobiano de las funciones D/L y V/L^3 respecto a las variables α y φ), hay que satisfacer las

ecuaciones

$$d(D/L) = \frac{\partial(D/L)}{\partial\alpha} d\alpha + \frac{\partial(D/L)}{\partial\varphi} d\varphi = 0 \quad (5)$$

$$d(V/L^3) = \frac{\partial(V/L^3)}{\partial\alpha} d\alpha + \frac{\partial(V/L^3)}{\partial\varphi} d\varphi = 0 \quad , \quad (6)$$

con $d\alpha$ y $d\varphi$ no nulos, lo que exige la anulaci3n del Jacobiano

$$J(\alpha, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial(D/L)}{\partial\alpha} & \frac{\partial(D/L)}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial(V/L^3)}{\partial\alpha} & \frac{\partial(V/L^3)}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (7)$$

La generalidad de esta relaci3n, y la comprobaci3n de los c3mputos num3ricos, justifican un an3lisis te3rico aunque s3lo sea lineal, en particular para zonas casi cilindricas:

$a \ll 1$ ($m=1$). En este caso, la condici3n (7) nos da la ecuaci3n trascendente

$$\text{tg}(\pi - 2\varphi) = \pi - 2\varphi \quad , \quad (8)$$

cuya primera soluci3n es $\varphi = -.676$, lo que conduce a $D/L = .22$ y $V/L^3 = .04$.

La curva de volumen m3nimo, $J(\alpha, \varphi) = 0$, est3 dibujada en la Fig. 2.5, y es la que une los puntos A y B a trazos, B y C a linea llena, y contin3a a trazos. Sin embargo, s3lo nos limita el volumen en el tramo BC ($.5 < D/L < 2.5$), ya que para $D/L > 2.5$ aparece un condicionante m3s severo, y es el de "impenetrabilidad"; es decir, la restricci3n de 3ngulo en el borde < 0 nos da

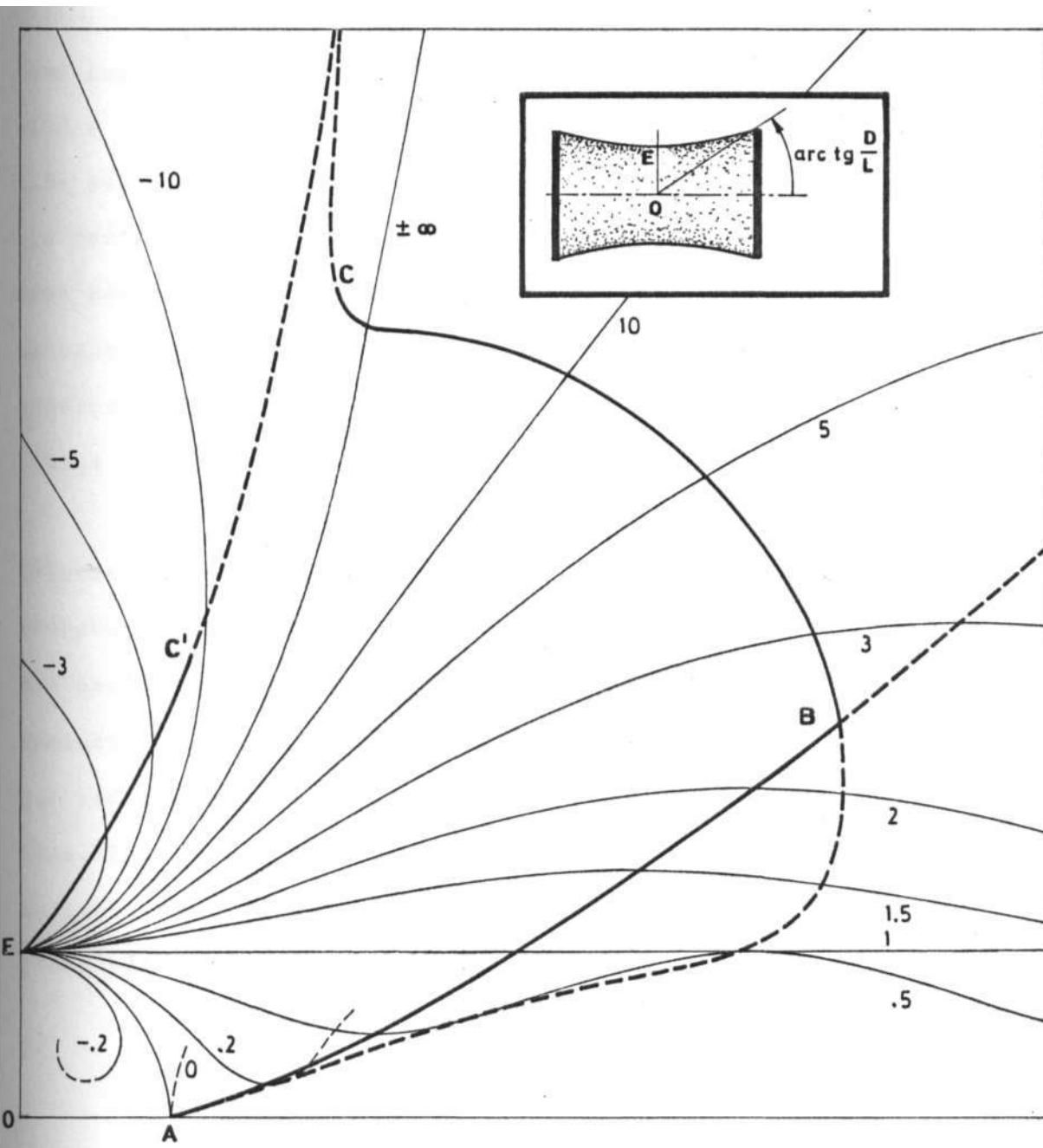


Fig. 2.5. Formas posibles de equilibrio estable de una zona líquida flotante entre dos discos de diámetro D , separados una distancia L . La intersección de una recta que pase por 0 con pendiente D/L y las sucesivas curvas de la figura nos delimita la zona según se indica en el esquema. El volumen va disminuyendo al alejarnos del punto 0_3 y el límite estable es el contorno $ABCC'E$.

como lugar geométrico de los bordes la curva EC' (y su continuación a trazos), resultando que para $D/L > 2.5$ se impone esta condición sobre la de "volumen mínimo", que sólo gobierna para $D/L < 2.5$ (la recta $D/L = 2.5$ une los puntos O , C' y C en la Fig. 2.5). Por otra parte, para $D/L < .5$, aparece un nuevo condicionante: la zona se hace inestable, apareciendo una bifurcación hacia formas no simétricas (respecto al plano medio entre discos) que no son estables (se estudiarán posteriormente en este capítulo).

Hay que volver a insistir en que las funciones son multiformes y que la relación de "mínimo volumen" elegida es la correspondiente al primer mínimo relativo, pues las sucesivas formas serían inalcanzables. También hay que recordar que no se ha incluido el efecto del ángulo de contacto sólido-líquido-gas, y que reduciría apreciablemente el valor del volumen máximo de una zona. Para zonas muy compactas ($D/L > 2.5$) el ángulo de contacto marcaría el comienzo del deslizamiento de los bordes al ir extrayendo más y más líquido (Fig. 2.6).

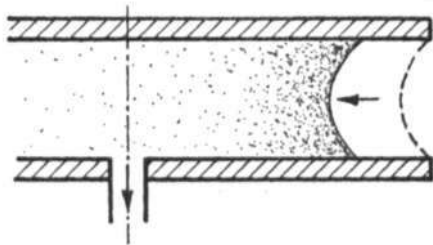


Fig. 2.6. Deslizamiento de la superficie libre hacia el centro al ir extrayendo líquido en una zona compacta.

Como resultado del estudio de la capacidad de una zona flotante en reposo, aunque no se demostrará hasta el apartado siguiente la limitación no simétrica, podemos representar el exceso o defecto de volumen respecto a la posible forma cilíndrica en función de la esbeltez (Fig. 2.7). El límite superior (exceso sobre el cilindro) es una curva única, pero el límite inferior (defecto sobre el cilindro) presenta tres zonas bien distintas: para zonas muy esbeltas el límite lo marca la inestabilidad anti-simétrica (se verá a continuación); en el otro extremo, para zonas muy cortas, el límite viene impuesto porque el líquido abandona el borde del disco y desliza hacia el interior; para esbelteces intermedias el límite es debido a un mínimo local del volumen, como ya se ha visto antes.

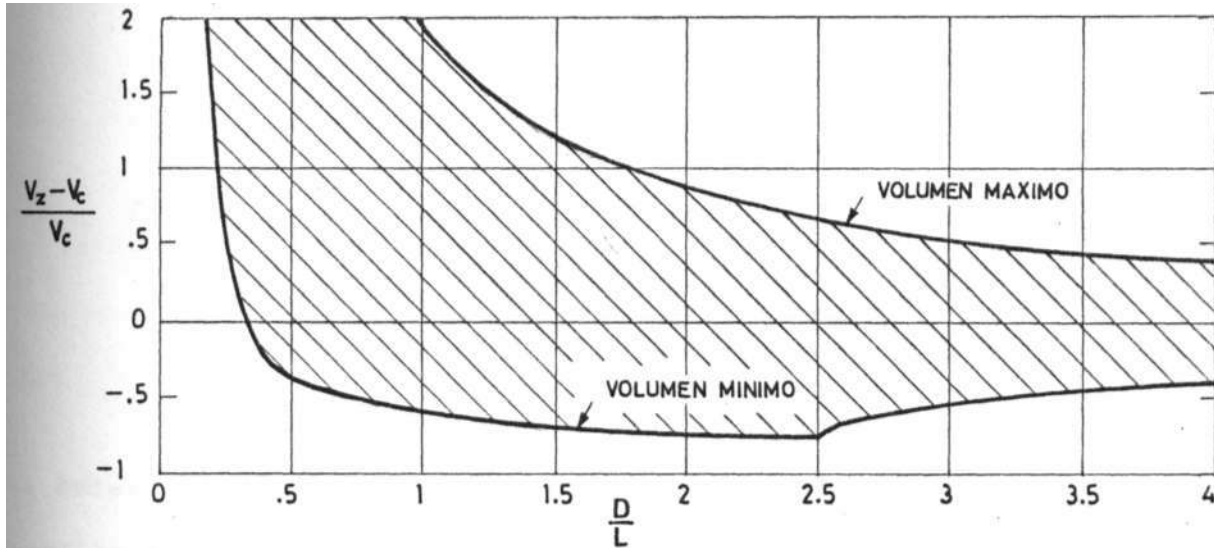


Fig. 2.7. Límites de la capacidad relativa de una zona comprendida entre dos discos de diámetro D , y separación L .
 V_z , volumen de la zona líquida
 V_c , volumen de la zona cilíndrica ($V = \pi D^2 L / 4$).

2.4. ANÁLISIS ESTÁTICO DE LA ESTABILIDAD DE UNA ZONA EN REPOSO

Empecemos con una explicación básica de lo que vamos a hacer. Sea E la energía total que tendría una zona líquida de volumen V comprendida entre dos discos de diámetro D y separación L supuesta "congelada" (impedido todo movimiento de sus partículas) en una cierta posición que puede ser identificada por un parámetro y (por ejemplo, el radio de la zona en el plano mitad; aunque la explicación es general). En la Fig. 2.8 se esquematiza una representación gráfica de E dentro del margen de y a estudiar.

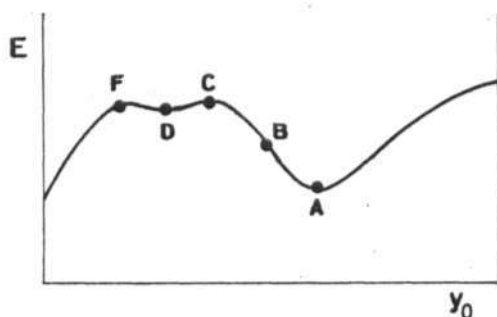


Fig. 2.8. Esquema de la variación de la energía con un parámetro.

- A, D, situación de equilibrio estable
- B, situación de desequilibrio
- C, F, situación de equilibrio inestable.

El primer paso en el estudio de un sistema mecánico es la determinación de las situaciones de equilibrio (A, C, F, etc.), para lo cual se impone la condición $dE = 0$ (método variacional, expuesto en 1.2 y 2.6).

El segundo paso es la clasificación de las situaciones de equilibrio en estables (A, D) e inestables (C, F). Para ello, si se conociese la función $E(y_0)$ de la Fig. 2.8, bastaría estudiar-

su derivada segunda y ver si se trata de máximo o mínimo. Pero la función $E(y)$ es, en general, demasiado difícil de obtener, y entonces se utilizan uno de los métodos siguientes:

- Método dinámico: se calcula el punto de equilibrio y la forma de la curva en sus proximidades (exige un análisis dinámico, aunque sea lineal).

- Método estático: hace falta calcular por lo menos dos puntos de equilibrio consecutivos para asegurar que el de mayor energía es un máximo y el de menor un mínimo, pero no hace falta entrar en análisis dinámicos.

El tercer paso es la determinación de la configuración que adoptaría el sistema en la realidad, esto es, dentro de las situaciones de equilibrio estable, cual se alcanzaría partiendo de una situación anterior "real". Para hacer más intuitivo el razonamiento, pensemos que la curva $E(y)$ de la Fig. 2.8 fuera un alambre plano por el que puede deslizarse una perla sin rozamiento sometida a la acción de la gravedad. Por el análisis del equilibrio obtendríamos los puntos A, C, D, F. Por el análisis de la estabilidad dividiríamos entre estables A, D e inestables C, F. Por el análisis del proceso continuo deduciríamos que si la perla está inicialmente en A (equilibrio estable) nunca podrá quedarse en el punto D pues si lograra superar la cima C se aceleraría tanto en su bajada CD que traspasaría la cima F y escaparía del pozo D (incluso suponiendo un ligero rozamiento).

Volvamos a las zonas líquidas flotantes. En el Cap. 1

se obtuvieron las formas de equilibrio. Como se conocen puntos consecutivos (los sucesivos puntos de corte con un mismo volumen v en la Fig. 2.3) es muy fácil distinguir entre configuraciones de equilibrio estable y de inestable. Vamos pues a estudiar un proceso continuo (llenado, vaciado, estirado, etc.) para deducir la configuración que "se dará en la realidad. Podríamos decir que se trata de analizar la sucesión de curvas $E(y_0, v)$ de la Fig. 2.9, donde v es el parámetro que estamos variando en este proceso continuo (piénsese por ejemplo en la extracción de volumen de una zona de esbeltez dada).

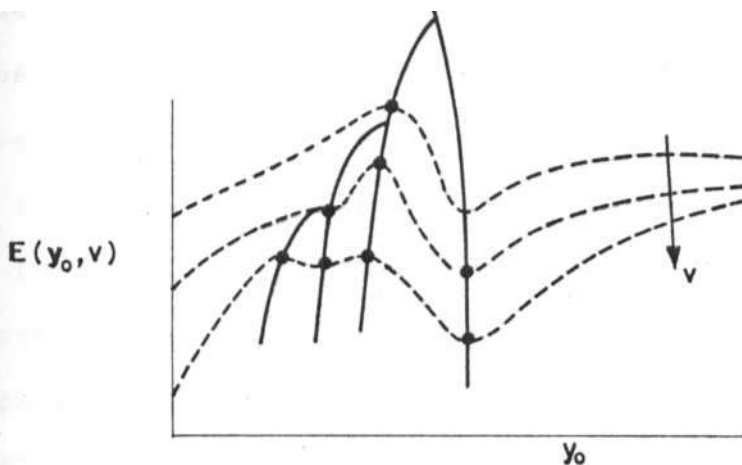


Fig. 2.9. Esquema de la ramificación de las soluciones de equilibrio

- Puntos de equilibrio
- Curvas de la variación de la energía para cualquier configuración de equilibrio o desequilibrio (Fig. 2.8)
- Evolución continua en el proceso casi estacionario.

Como muestra la Fig. 2.9, aparecen ramificaciones en -

las curvas que unen las sucesivas situaciones de equilibrio (úni

cos puntos conocidos, pues para todos los demás de las curvas $E(y, v)$ sería necesario el análisis dinámico). Para saber por qué rama seguiría el sistema en la realidad hay que estudiar el problema de bifurcación correspondiente. Primero se determinaría el punto de bifurcación y luego se estudiarían las configuraciones próximas.

Consideremos aún con más detalle el comportamiento de las zonas líquidas flotantes. En la Fig. 2.10 se ha dibujado el diagrama energía-volumen para diferentes esbelteces. Supongamos que nuestros discos tienen un diámetro D y separación L (fijos) tal que $D/L = .7$ para fijarnos en una curva particular. Supongamos que inicialmente el volumen adimensional es $V/L^3 = .3$ y admitamos que la zona está en equilibrio estable y por tanto en el punto $(.3, .28)$ del diagrama. Ahora, manteniendo la esbeltez constante ($D/L = .7$), vamos extrayendo líquido en un proceso continuo (a través de un orificio en un disco) con la suficiente lentitud como para que se trate de una sucesión de estados de equilibrio; nos estaremos moviendo hacia la izquierda por la curva $D/L = .7$ en la Fig. 2.10. Para cada volumen, la configuración podría ser distinta a la considerada (corte superior de la curva $D/L = .7$ con la recta $V/L^3 = \text{cte}$), pero esa otra solución es inestable y no se presentará en la realidad. Resulta evidente que si seguimos extrayendo líquido, cuando sea $V/L^3 = .18$ la zona se romperá. Podríamos

pensar que pasase a una nueva forma sin necesidad de "romperse" en el sentido estricto de separarse en dos gotas, una en cada dis-

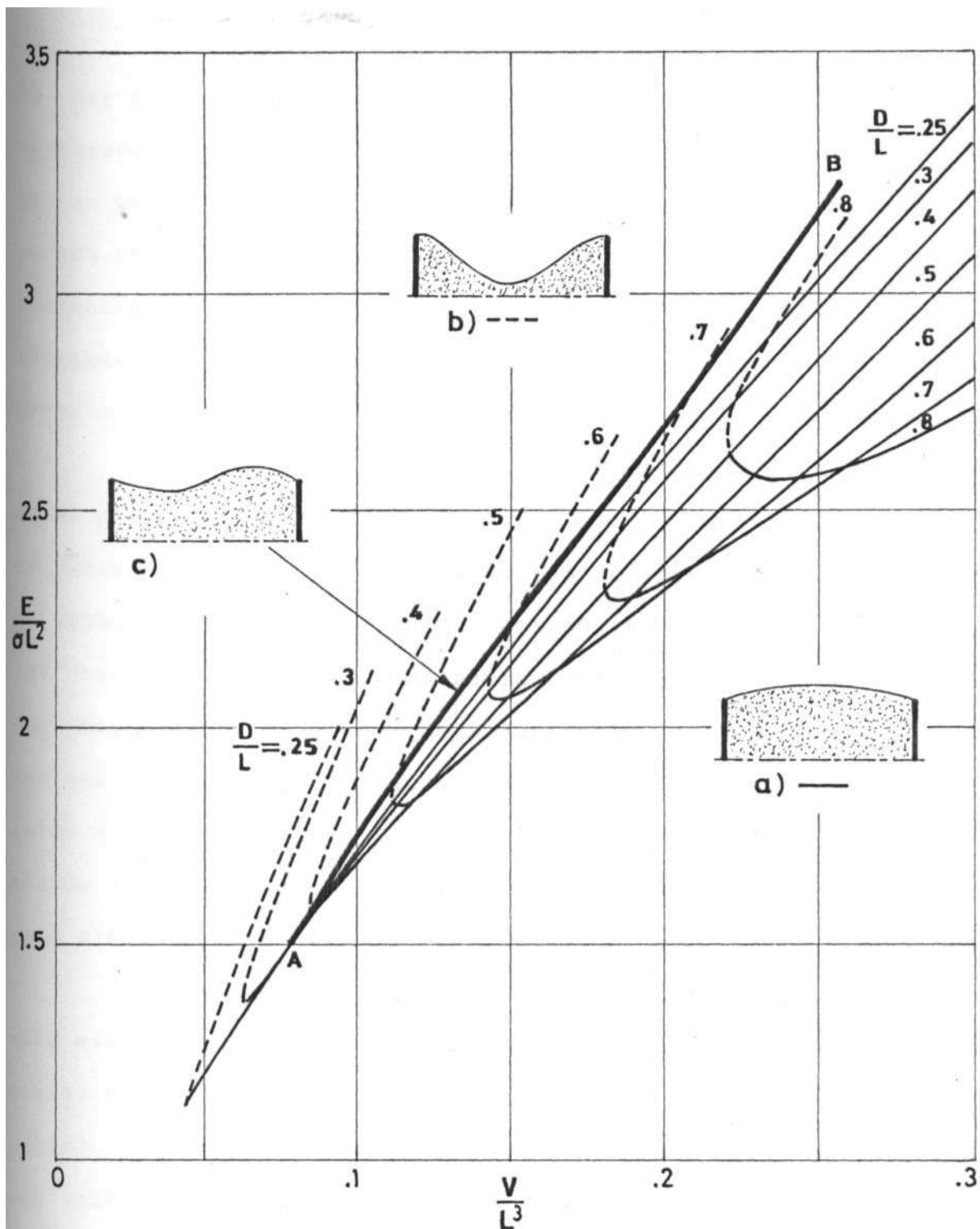


Fig. 2.10. Energía en función del volumen para esbeltez $\frac{D}{L} = 0.25$
 A-B, zonas no simétricas (un periodo completo)
 a) , zona inicial. Se extrae líquido hasta que rompe
 b) , rotura simétrica (el volumen pasa por un mínimo)
 c) , rotura no simétrica (pérdida de la estabilidad)

co. Nos puede mover a este supuesto el hecho de que existe una configuración no simétrica de equilibrio con ese mismo volumen.

Sí, en realidad, para cada volumen hay tres soluciones (en este margen de energías): dos son las ya explicadas anteriormente (intersección de $V/L^3 = \text{cte}$ con la curva $D/L = .7$) y la otra es una

configuración no simétrica del tipo esquematizado en la Fig.2.10-c), pero, como se verá más tarde, también es inestable (para $D/L=.7$).

Sin embargo, para $D/L < .5$ (por ejemplo la curva $D/L=.4$) en el proceso de vaciado de la zona se llega antes al corte con la curva AB (Fig. 2.10) de las formas no simétricas que al punto de volumen mínimo, reduciéndose más aun el límite de estabilidad (se rompe antes). Para demostrarlo hemos de hacer un estudio de las proximidades del punto de bifurcación. Para ello, dibujemos

los puntos de equilibrio de una zona de esbeltez $D/L = .4$, un poco antes de la bifurcación $V/L^3 = .090$ y un poco después de la bifurcación $V/L^3 = .085$; como variable de definición de la forma de la zona elegimos el ángulo de contacto en el borde (ver Fig. 2.11).

Se observa en la Fig. 2.11 que el "valle" de la solución estable (que es simétrica respecto al plano mitad) está contenido entre las cumbres de la solución no simétrica (que es inestable). En el punto 0 las cumbres se juntan y ya no dan cabida a ese valle, por lo que el equilibrio se hace inestable y la zona se rompe en dos "gotas" (casquetes esféricos) desiguales; para determinar el tamaño de cada gota sería preciso resolver todo el problema dinámico de la rotura.

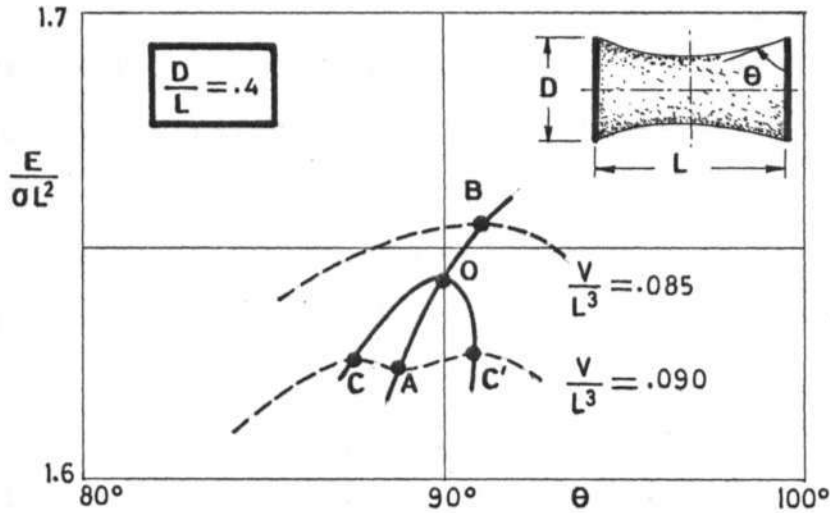


Fig. 2.11. Diagrama de los puntos de equilibrio en las proximidades de un punto de bifurcación

- , puntos de equilibrio
- , sucesión de estados de equilibrio
- AO , extracción estable (simétrica)
- C'O, CO , soluciones no simétricas (inestables)
- OB , solución simétrica inestable
- O , punto de rotura.

Así pues, para zonas muy esbeltas, el límite de estabilidad viene marcado por la condición de que la forma de equilibrio sea un ciclo completo de las superficies de revolución de curvatura constante (véase la Fig. 2.5). La importancia que tiene el estudio de la estabilidad de las zonas casi cilíndricas aconseja disponer de un gráfico que pueda usarse directamente sin necesidad de cálculos adicionales, tal como el dibujado en la Fig. 2.12. Supongamos que queremos observar la rotura de una zona cilíndrica (punto C). Podremos partir de una forma cilíndrica de $L/D = 2.5$, $V/D^3 = 2$ y seguir por la curva de trazos hasta C. Sin em

bargo, parece más sencillo partir de una forma más rellena pero ya con $L/D = \pi$ para que sólo haya que extraer líquido sin mover

las placas; o todavía mejor, partir de $L/D = 2.5$ con $V/D^3 = 2.5$ y, a volumen fijo, separar las placas hasta llegar a $L/D = \pi$. En la Fig. 2.13 se da una relación que puede ser usada como "avisador" directo (basta una comparación del diámetro en el centro con el de los discos para saber si está próxima la rotura).

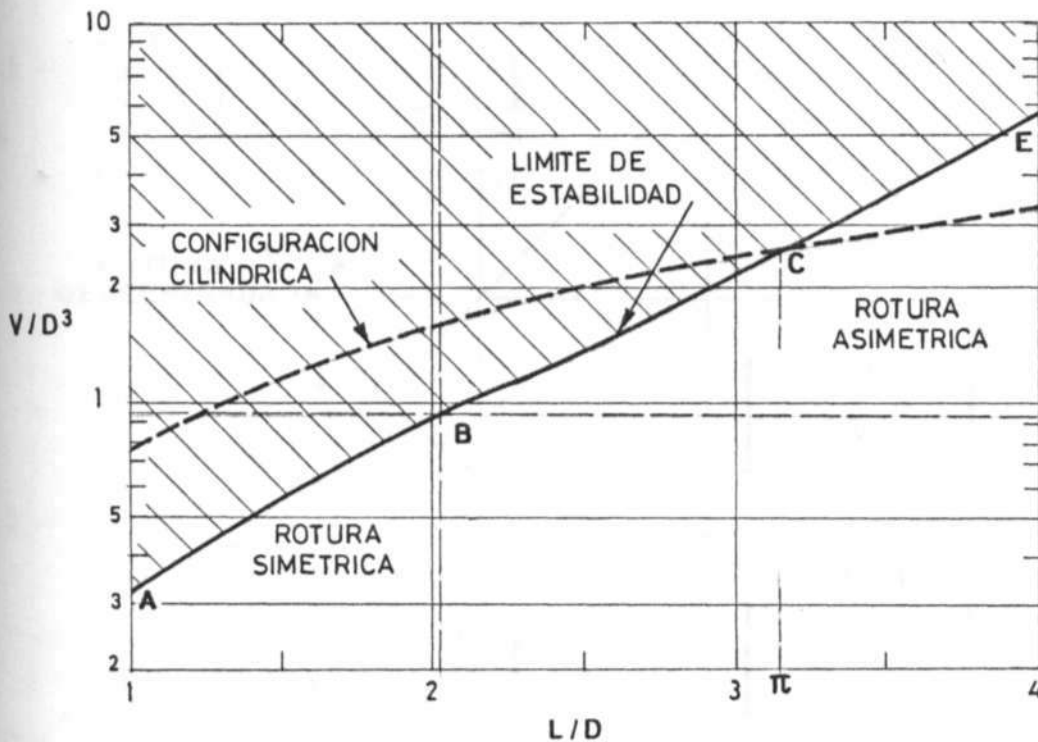


Fig. 2.12. Límite de estabilidad de una zona líquida comprendida entre dos discos de diámetro D , separados una distancia L .
 Proceso de vaciado de una zona (verticales)
 Proceso de estirado de una zona (horizontales)
 A-B, rotura simétrica tras pasar por la forma cilíndrica
 B-C, rotura asimétrica tras pasar por la forma cilíndrica
 C-E, rotura asimétrica antes de alcanzarse la forma cilíndrica.

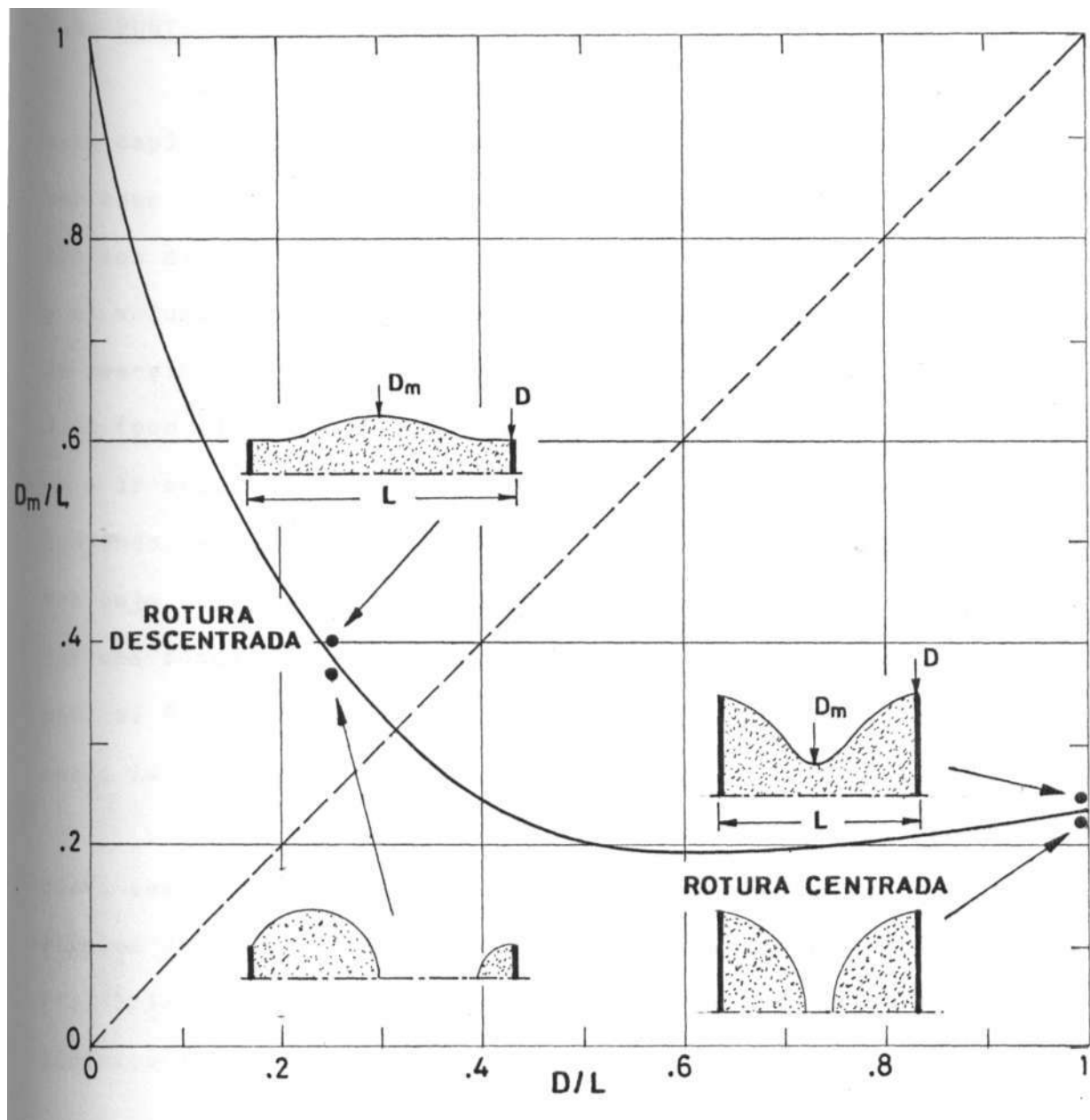


Fig. 2.13. Diámetro mínimo adimensional de una zona líquida flotante en función del diámetro de los discos soporte (volumen mínimo es table). Se han incluido dos ejemplos de rotura (para $D/L = .25$ y $D/L = 1$).

2.5. PUNTUALIZACIONES SOBRE CIERTOS CASOS PARTICULARES

Durante todo el análisis que hemos hecho hasta aquí en este capítulo sobre la estabilidad nos hemos limitado a considerar como variables "directamente controlables" la separación entre los discos (que con el diámetro nos definiría la esbeltez) y el volumen de líquido contenido. Esta limitación no tiene nada de restrictiva, y una vez obtenida la curva de rotura de la Fig. 2.12 (por ejemplo), si en lugar de querer mantener un volumen fijo e ir separando los discos, o bien fijar la separación e ir extrayendo, estamos interesados en ir separando y extrayendo a la vez bajo una ley cualquiera $f(L,V) = 0$, no tenemos más que dibujar esa función y ver donde corta a la curva de rotura. Por ejemplo, si $f(L,V) = V - \pi D^2 L/4 = 0$ (sucesión de configuraciones cilindri-

cas), la zona se romperá al llegar al punto C (Fig. 2.12).

Este análisis de la estabilidad de zonas "condicionadas", pese a no ser el más intuitivo, es el más antiguo, y ya a finales del siglo pasado Lord Rayleigh dedujo el punto C de la Fig. 2.12 haciendo un estudio dinámico lineal de un "chorro" cilíndrico flotante.

Desgraciadamente, estas analogías de las zonas líquidas contenidas entre dos discos con los chorros flotantes y con las películas de jabón, hay que tomarlas con cierta precaución. Por ejemplo, viene siendo usual en la literatura sobre zonas flotantes el error de asignarle el mismo valor del límite de estabilidad a las formas catenoides de películas de jabón y zonas flotantes.

es, sin percatarse de que la energía está en un caso contenida en la superficie y en el otro dividida entre la superficie y el volumen, y que, una forma próxima que tuviese más energía de superficie, podría tener aún menor energía de volumen y seguir siendo estable.

En la Fig. 2.14 se ha dibujado la curva de rotura de zonas casi catenoides. La sucesión de catenoides es la curva $m = \pm \infty$, en la que se encuentran los puntos H, H' y H'' que vamos a comentar. Si, mediante un regulador (manual o automático) consiguiésemos una sucesión de catenoides, partiendo por ejemplo de la de $D/L = 1.6$, $V/L^3 = 1.4$, iríamos bajando por la curva $m = \pm \infty$ disminuyendo el volumen y aumentando ligeramente la separación entre los discos hasta un valor máximo (punto H). Es en este punto donde se suele considerar el límite de estabilidad, argumentando que si se separasen más los discos la zona se rompería, al no existir ulteriores soluciones catenoides. El quid reside en esta última frase, ya que lo que en realidad ocurrirá es que la zona ya no podrá tener forma catenoide, que es bien distinto del hecho de romperse. Además, los que mantienen este criterio erróneo no hacen buen uso de sus hipótesis, pues, si se habían propuesto estudiar las sucesivas configuraciones catenoides lo que debían es de seguir por la curva H H' H'' y no querer estirar aún más al llegar al punto H. Para una mejor comprensión del fenómeno, hemos dibujado aparte la curva de las catenoides en variables de control directo (discos de diámetro fijo D, separación variable L y volu-

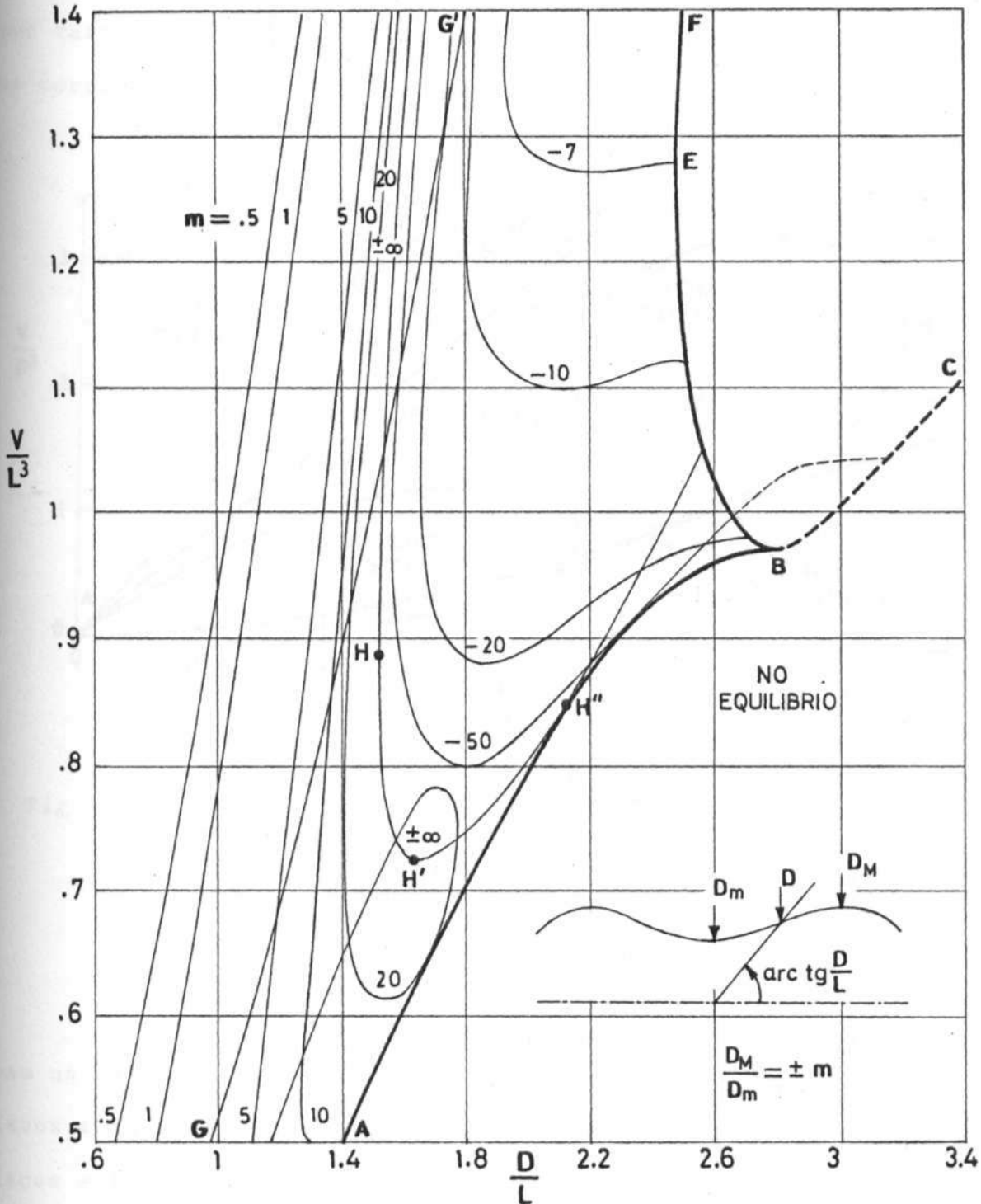


Fig. 2.14. Sucesivas configuraciones que adoptaría una zona líquida regulando la inyección y el estirado para que la forma de la superficie libre sea parte de una misma familia (m). La curva G'G(esfera) es la "continuación" de la H H' H'' (catenoide). El limite de estabilidad es AH''BEF, estando compuesto por la curva del volumen mínimo AH''B, y la de ángulo nulo en el borde, CBEF.

men variable V), Fig.2.15. (los puntos H y H'' de dichas figuras se corresponden; no así los H' y H''').

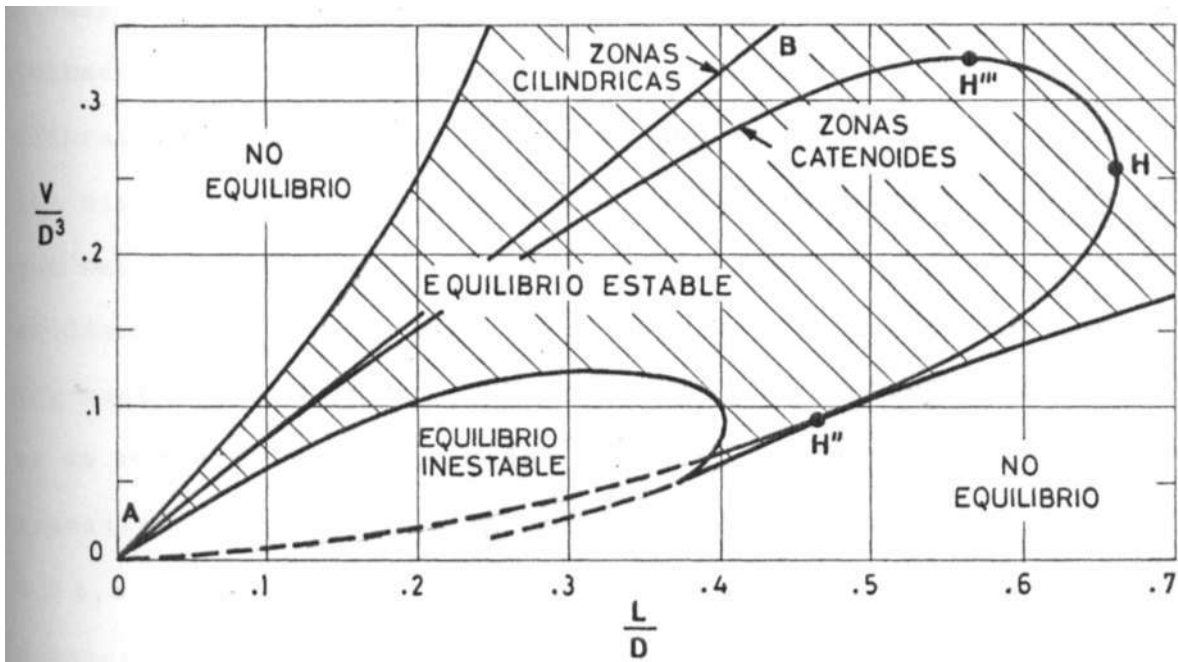


Fig. 2.15. Volumen de líquido contenido entre dos discos de diámetro fijo, D , en función de la distancia entre ellos L , para la sucesión de formas catenoides, $AH''H'''$.

H'' , punto de rotura

AB , sucesión de formas cilíndricas.

Supongamos que se trata de discos de 6 cm. de diámetro.

Tras un delicado proceso de llenado (por ejemplo, juntando los discos e inyectando líquido a través de un orificio en uno de los discos a la vez que se van separando), llegamos por ejemplo a una forma catenoide con 60.5 c.c. de líquido cuando la separación es de 2.4 cm. Si queremos que las sucesivas formas sean también

catenoides y seguimos separando los discos, habrá que ir introduciendo más líquido, hasta una separación de 3.4 cm. a partir de la cual, si seguimos separando, hemos de ir extrayendo líquido. Al llegar a una distancia de 4 cm. de separación entre los discos (el volumen en ese momento es de 56 c.c.) la zona no se rompe (en la literatura se decía que sí), sino que ya no se pueden separar más los discos y a la vez seguir con configuraciones catenoides. Lo que hay que hacer si se quiere seguir generando formas catenoides es disminuir la separación a ir extrayendo líquido simultáneamente, hasta que, ahora sí, al llegar al punto H'' (Fig. 2.15), la zona se rompería en dos mitades iguales, quedando, tras un proceso transitorio disipativo, en forma de dos casquetes esféricos de 9.7 c.c. de volumen. Pero, pese a este límite, todavía se pueden obtener zonas catenoides más angostas, aunque no mediante el proceso que se acaba de exponer, sino extrayendo líquido de una zona con $.38 < L/D < .47$ como se puede apreciar en la Fig. 2.15.

Antes de seguir es preciso justificar todo este detalle con que se presenta el estudio de las zonas líquidas de forma catenoide. Como se sabe, con esta forma de la zona el líquido está a la presión de la atmósfera externa. Esta propiedad parece ser importante para ciertos estudios experimentales que intentan establecer una correlación entre fuerzas moleculares de largo alcance de van der Waals (disjoining pressure) y la separación de la forma real de una zona flotante respecto a estas "formas puras" que se han tratado en este trabajo (nodoides y onduloideas de Plateau).

Además, por ser la catenoide una superficie de tratamiento matemático elemental, puede resultar provechoso para contrastar las teorías con los experimentos.

Hasta aquí, todas las discusiones sobre los límites de estabilidad se han hecho partiendo de un análisis global, reflejado por ejemplo en la Fig. 2.5. Ahora vamos a estudiar los dos casos particulares más importantes, cilindro y catenoide, independientemente y desde un principio. Queremos con ello dar una visión concisa de un punto particularmente importante, y mostrar un camino alternativo y elegante de llegar al mismo resultado.

Límite de estabilidad de las zonas cilíndricas en reposo

Planteamos aquí el problema en los términos siguientes: buscarnos una función $y(x)$ definida, continua y derivable en el intervalo $-1/2 < x < 1/2$, donde debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} - \frac{1}{y(1+y'^2)^{1/2}} + p = 0 \quad , \quad (9)$$

y cumplir las condiciones

$$y\left(\pm \frac{1}{2}\right) = a \quad (10)$$

$$\pi \int_{-1/2}^{1/2} y^2 dx = v \quad , \quad (11)$$

siendo p una constante a determinar en el proceso de resolución pero que no figura explícitamente en la solución, que será una

cierta función de los dos parámetros independientes a y v , fijados a priori: $y(x, a, v)$.

Sabemos que, para que la zona sea cilíndrica, el volumen ha de estar relacionado con la esbeltez en la forma $v = \pi a^2$.

La solución será entonces $y(x) = a$. Sabemos también (por intuición) que existen múltiples configuraciones con esa relación volumen-esbeltez, en forma de dos casquetes esféricos uno en cada disco, pero no estamos interesados en zonas rotas. En cambio, si estamos interesados en saber si existen soluciones distintas de "la trivial" (la cilíndrica). En particular, queremos saber si hay alguna otra solución en las "proximidades" de la forma cilíndrica. Se trata pues de un problema típico de bifurcación. Llamemos ε a una cantidad pequeña que esté relacionada con la desviación de la forma respecto al cilindro (por ejemplo la separación del ángulo en el borde respecto a los 90° del cilindro, o el valor relativo del radio máximo). La solución esperada, $y(x, a, \varepsilon)$ (con $v = \pi a^2$) puede desarrollarse en potencias de ε ,

$$y = y_0 + \varepsilon y_1 + O(\varepsilon^2), \quad (12)$$

donde la y_0 es constante ($y_0 = a$). Asimismo, el parámetro interno podrá ponerse como

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + O(\varepsilon^2), \quad (13)$$

con lo que las ecuaciones (9), (10) y (11) pasan a la forma desarrollada

$$\frac{-1}{y_0} + p_0 + \varepsilon \left[y_1'' + \frac{1}{2} y_1 + p_1 \right] + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (14)$$

$$y_0 - a + \varepsilon y_1 \left(\pm \frac{1}{2} \right) + O(\varepsilon^2) = 0 \quad , \quad (15)$$

$$\pi y_0^2 - v + \varepsilon 2\pi y_0 \int_{-1/2}^{1/2} y_1 dx + O(\varepsilon^2) = 0 \quad . \quad (16)$$

El término lineal, que nos dará la situación del punto de bifurcación, quedará, una vez sustituida y por a,

$$y_1'' + \frac{1}{a} y_1 + p_1 = 0 \quad (17)$$

$$y_1 \left(\pm \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (18)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} y_1 dx = 0 \quad . \quad (19)$$

Al imponer a la solución de (17) las tres condiciones (18) y (19) se obtiene un sistema homogéneo de tres ecuaciones para la determinación de las dos constantes de integración de (17) y la p_1 .

Para que el sistema tenga solución distinta de la trivial, el determinante

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} \frac{1}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 2a \operatorname{sen} \frac{1}{2a} - \cos \frac{1}{2a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \cos \frac{1}{2a} & -a \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad (20)$$

ha de anularse en el punto de bifurcación. Las sucesivas soluciones, ordenadas de mayor a menor a , son

$$a = \frac{1}{2\pi}, .11, \frac{1}{4\pi}, .05, \dots \quad (21)$$

Tomando el primer valor como único significativo, concluimos que las zonas cilíndricas presentan una bifurcación para $L/D = \pi$, valores que coincide con el encontrado por Rayleigh para la longitud de onda inestable de las perturbaciones en un chorro libre [4].

El análisis lineal no nos da la amplitud de la deformada, sino que se limita a darnos la situación del punto de bifurcación y el tipo de deformación, en nuestro caso senoidal. Si quisiéramos estudiar la amplitud en las proximidades del punto de bifurcación, resolveríamos el problema de segundo orden del desarrollo (14)-(15)-(16) que no presenta gran dificultad, y, puesto que se trata de un caso particular de la solución general dada en el apartado 2.4, nos limitamos a dar el resultado:

$$y = a + 2 \sqrt{\frac{a}{3}} \sqrt{a - a_{cr}} \operatorname{sen} \frac{x}{a}, \quad (22)$$

donde a_{cr} es el valor de a en el punto de bifurcación. Aunque es —*^H — este resultado nos parece ahora sencillo de interpretar (Fig. 2.16), cuando se obtuvo (cronológicamente anterior al análisis general presentado en 2.4) resultó sorprendente el hecho de que la bifurcación fuese "hacia atrás", es decir, hacia $a > a_{cr}$

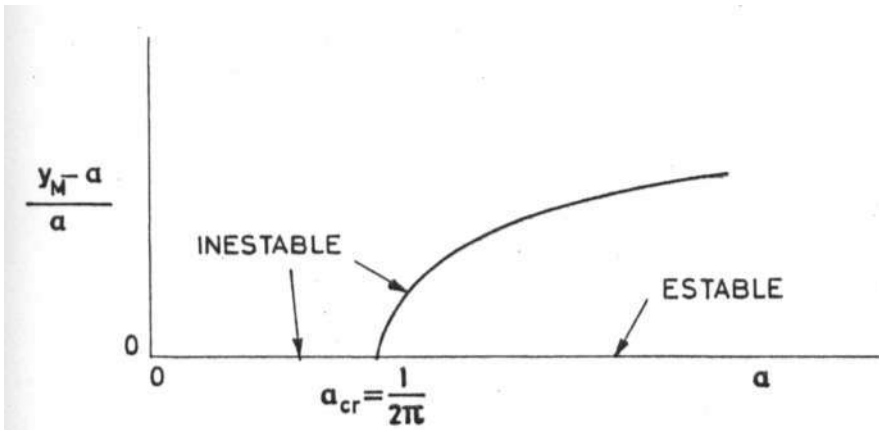


Fig. 2.16. Bifurcación de las zonas cilíndricas.

Limite de estabilidad de las zonas catenoides

Análogamente a como se ha hecho para las formas cilíndricas, vamos a detallar aquí el problema de la estabilidad de la forma catenoide. Las ecuaciones son las mismas: (9), (10) y (11), pero la relación entre los parámetros a y v ya no es $v = \pi a^2$ sino $v = v(a)$ definida en paramétricas como

$$a = \frac{\text{Ch } \frac{b}{2}}{b} \quad v = \frac{\pi}{2} \frac{b + \text{Sh}b}{b^3} \quad (23)$$

Hacemos el mismo desarrollo (12) y (13), pero la y ya no es constante sino que vale

$$y_0 = \frac{\text{Ch}bx}{b} \quad , \quad (24)$$

y el problema desarrollado pasa a ser

$$p_0 + \varepsilon \left[\frac{1}{\text{Ch}^3 bx} y_1'' - \frac{2b \text{Sh}bx}{\text{Ch}^4 bx} y_1' + \frac{b^2}{\text{Ch}^3 bx} y_1 + p_1 \right] + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\text{Ch } \frac{b}{2}}{b} - a + \epsilon y_1 \left(\pm \frac{1}{2} \right) + 0(\epsilon^2) = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{b + \text{Sh}b}{b^3} - v + \epsilon \frac{2\pi}{b} \int_{-1/2}^{1/2} y_1 \text{Ch}bx \, dx + 0(\epsilon^2) = 0 \quad (27)$$

Es decir, el término lineal es

$$y_1'' - 2b \text{th}bx y_1' + b^2 y_1 + p_1 \text{Ch}^3 bx = 0 \quad (28)$$

$$y_1 \left(\pm \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (29)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} y_1 \text{Ch}bx \, dx = 0 \quad (30)$$

Imponiendo las condiciones (29) y (30) en la solución de (28) obtenemos un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas que debe anularse si existe una solución distinta de la catenoide. Esta condición nos da el valor del parámetro en el punto de bifurcación, resultando ser

$$b_{cr} = 1.12 \implies \begin{cases} a = 1.06 \\ v = .85 \end{cases} \quad (31)$$

Quisiéramos comentar la extrañeza que supuso la obtención de este resultado cuando, según las publicaciones consultadas, se esperaba obtener $b_{cr} = 2.4$ ($L/D = .67$). Como ya hemos dis-

cutido anteriormente, este último valor, válido para películas de jabón apoyadas en dos anillos que pueden separarse a voluntad, no es de aplicación a las zonas líquidas flotantes.

Finalmente, conviene aclarar que, aunque la sencillez de las ecuaciones diferenciales del tipo (28) que se obtienen en el desarrollo lineal de la ecuación diferencial (9) no requiere sofisticados métodos de resolución, existe un camino muy elegante para la obtención de las soluciones de (28) que se obtiene en la teoría del cálculo de variaciones como se expone a continuación.

2.6. FORMULACIÓN VARIACIONAL DE LA ESTABILIDAD DE UNA ZONA LIQUIDA FLOTANTE: CASO GENERAL.

Como decíamos en el apartado 1.2, podemos construir una función Φ en la forma

$$\int_{-1/2}^{1/2} \phi dx = \frac{T-U}{\sigma L^2} + \lambda \frac{V}{L^3}, \quad (32)$$

siendo T la energía cinética (si la zona gira), U la energía potencial (debida a la energía superficial y a la del campo gravitatorio), V el volumen de líquido en la zona, y λ un multiplicador de Lagrange. T, U, y V dependen solamente de x, y e y' (forma de la superficie). La solución será tal que dé un valor extrema a la integral (32), por lo que habrá de cumplir la ecuación de Euler

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y'} \right) = 0 \quad (33)$$

De esta ecuación diferencial sacamos las formas de las soluciones de equilibrio. Por ejemplo, para zonas en reposo, la ecuación de Euler nos da la (9). Si ahora buscamos las soluciones próximas a una dada y sustituimos el desarrollo (12) en (33) obtenemos una ecuación tal como la (28) para la aproximación lineal, cuya homogénea es la ecuación de Jacobi,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} y_1' \right) + \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial y'} \right) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right] y_1 = 0 \quad . \quad (34)$$

Esta ecuación es en realidad la ecuación en las variaciones correspondiente a la ecuación de Euler. Pues bien, dada una familia de soluciones de equilibrio dependiente de dos parámetros, la derivación parcial respecto a cada uno de ellos nos da un par de soluciones linealmente independientes de la ecuación de Jacobi.

2.7. EFEECTO DE LA ROTACIÓN SOBRE LA ESTABILIDAD DE LAS ZONAS CILINDRICAS

Es interesante, desde un punto de vista teórico, el análisis del efecto de un campo radial uniforme de fuerzas másicas sobre la estabilidad de una zona líquida cilíndrica. Por una parte, cualquier perturbación axilsimétrica será amplificada por el centrifugado, que tenderá a hinchar una parte de la columna a expensas de la otra. Por otra, surge un nuevo modo de bifurcación, el no axilsimétrico, que no se había tomado en consideración has-

ta ahora porque sin rotación las perturbaciones no axilsimétricas (de pequeña amplitud) son estables. Este último efecto se suele conocer con el nombre de "modo C" o en comba.

La forma cilíndrica es la única que coincide con rotación y sin ella. Las demás (onduloides, catenoide, esfera, y nodoides) sólo son válidas sin rotación, la solución nos lleva a integrales hiperelípticas. No parece justificado un análisis de estas nuevas formas con rotación, porque no introducen ningún comportamiento esencialmente nuevo de las funciones solución; simplemente decir que la forma de la superficie libre depende muy poco de la velocidad de rotación, que lo único importante que hace es adelantar la rotura, como se va a ver ahora con el caso de mayor importancia: las zonas cilíndricas.

Sea una zona líquida de forma cilíndrica anclada en los bordes de dos discos del mismo diámetro (el considerar otras condiciones ideales de mojado no es difícil, pero tampoco pensamos que sea importante, por su poca realidad física).

Vamos a hacer un estudio variacional tal como el indicado en el apartado anterior, ciñiéndonos al análisis lineal respecto a la forma cilíndrica $r = a$ (hemos cambiado a coordenadas cilíndricas por costumbre, aunque con ello aumentamos la cantidad de símbolos).

Sea $r(\theta, z)$ la ecuación de la superficie de una masa líquida casi cilíndrica,

$$r(\theta, z) = a[1 + \epsilon \eta(\theta, z)] = a \left[1 + \epsilon \sum_{mn} A_{mn} \sin m\theta \sin n\pi \left(z + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (35)$$

En el análisis lineal podemos desacoplar los modos de deformación y tomar simplemente

$$\eta(\theta, z) = A \sin m\theta \sin n\pi(z + \frac{1}{2}) \quad . \quad (36)$$

Sean T, U y V la energía cinética, la energía potencial y el volumen de dicha zona. Operando en variables adimensionales, tendremos

$$\frac{T}{\sigma L^2} = \iiint \omega^2 r^3 dr d\theta dz = \iint \frac{\omega^2 a^4}{4} (1 + 4\varepsilon\eta + 6\varepsilon^2 \eta^2) d\theta dz \quad (37)^*$$

$$\frac{U}{\sigma L^2} = \iint r \sqrt{1 + \left(\frac{r\theta}{r}\right)^2 + r_z^2} d\theta dz = \iint a \left[1 + \varepsilon\eta - \frac{\varepsilon^2}{2} (\eta \eta_{\theta\theta} + a^2 \eta \eta_{zz}) \right] d\theta dz \quad (39)$$

$$\frac{V}{L^3} = \iiint r dr d\theta dz = \iint \frac{a^2}{2} (1 + 2\varepsilon\eta + \varepsilon^2 \eta^2) d\theta dz \quad . \quad (40)$$

Formamos la función de Euler ϕ definida en (32) y que ahora es función del parámetro pequeño ε

$$\begin{aligned} \phi(\varepsilon) = & \frac{\omega^2 a^4}{a} - a + \lambda \frac{a^2}{2} + \varepsilon (\omega^2 a^4 \eta - a\eta + \lambda a^2 \eta) + \\ & + \varepsilon^2 \left[\frac{3}{2} \omega^2 a^4 \eta^2 + \frac{a}{2} (\eta \eta_{\theta\theta} + a^2 \eta \eta_{zz}) + \lambda \frac{a^2}{2} \eta^2 \right] \quad . \quad (41) \end{aligned}$$

La condición de equilibrio será

$$\frac{d\phi}{d\varepsilon} = 0 \implies \omega^2 a^2 - \frac{1}{a} + \lambda = 0 \quad , \quad (42)$$

* $\omega = \sqrt{\frac{\rho \Omega^2 L^3}{2\sigma}}$ (véase 1.2).

que no es otra más que la relación que hay entre la presión en el eje (que coincide aquí con X) y las características de la zona: esbeltez y giro. La Fig. 2.17 muestra esta relación.

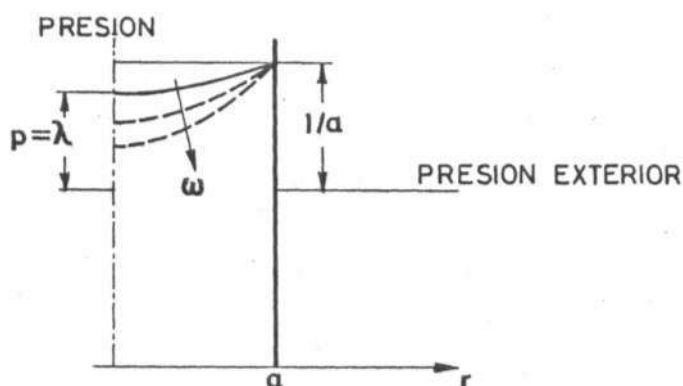


Fig. 2.17. Perfil de presiones en función de la coordenada radial para una zona cilíndrica de radio a y velocidad de rotación w (adimensionales).

El punto de bifurcación nos vendrá dado por la condición de extremal de las soluciones de equilibrio (mínimo a de

(42)).

$$\frac{d^2 \phi}{d\epsilon^2} = 0 \implies 3\omega^2 a^3 + \frac{\eta_{\theta\theta}}{\eta} + a^2 \frac{\eta_{zz}}{\eta} + \lambda a = 0, \quad (43)$$

que, haciendo uso de (42) y de (36), se convierte en

$$2\omega^2 a^3 - m^2 - a^2 \pi^2 n^2 + 1 = 0 \quad (44)$$

Este resultado lo vamos a pasar a variables dimensionales en dos formas distintas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{longitud máxima para } \frac{ra}{\sigma} \\ \text{dio y velocidad fijos } \end{array} \right\} \rightarrow L_{\max} = n\pi R \left(1 + \frac{\rho \Omega^2 R^3}{\sigma} - m^2 \right)^{-1/2} \quad (45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{velocidad máxima para} \\ \text{radio y longitud fijos} \end{array} \right\} \rightarrow \Omega_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R^3} \left(\frac{R^2 \pi n^2}{L^2} + m^2 - 1 \right)} \quad (46)$$

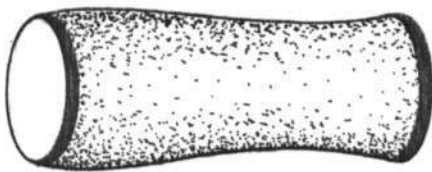
Para que el volumen se mantenga constante se debe cumplir

$$\left. \begin{array}{l} m = 0 \\ m \neq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} n = 2, 4, 6 \dots \\ n \neq 0 \end{array} \quad (47)$$

luego aparecen dos modos diferentes de rotura (la zona se rompe por los motivos explicados en 2.4, y que supondremos aplicables también a los modos no axilsimétricos). En la Tabla 1.2 se da un resumen del límite de estabilidad

Tabla 1.2. Modos de rotura de las zonas cilíndricas

Modo axilsimétrico ($m=0, n=2$) Modo no axilsimétrico ($m=1, n=1$)



(Forma en ánfora)

$$L \geq \sqrt{3} \pi R$$

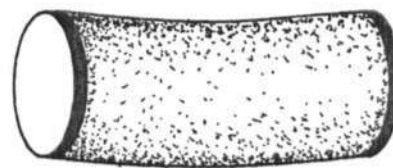
$$\Omega_{\text{rotura}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R^3} \left(\frac{4\pi^2 R^2}{L^2} - 1 \right)}$$

$$\Omega \leq \sqrt{\frac{\sigma}{3\rho R^3}}$$

$$L_{\text{rotura}} = 2\pi R \left(1 + \frac{\rho \Omega^2 R^3}{\sigma} \right)^{-1/2}$$

Rotura a L constante
(Ω aumentando)

Rotura a Ω constante
(L aumentando)



(Forma en comba)

$$L \leq \sqrt{3} \pi R$$

$$\Omega_{\text{rotura}} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}}$$

$$\Omega \geq \sqrt{\frac{\sigma}{3\rho R^3}}$$

$$L_{\text{rotura}} = \frac{\pi}{\Omega} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}}$$

CONCLUSIONES

Se ha tratado de presentar una exposición global propia de los estudios sobre zonas líquidas flotantes sin movimiento fluido interno (hidrostática).

Nos parece que la importancia de los resultados obtenidos a lo largo de este desarrollo es creciente desde el principio al final; por ello, si hubieran de señalarse los logros más destacados, apuntaríamos los obtenidos en la mitad posterior del segundo capítulo en donde se ha pretendido dar una visión intuitiva razonada de los procesos físicos planteados, más que un riguroso y formalista análisis matemático abstracto (opinamos que "el herramental", cuanto menos complicado mejor).

Salvo que surjan nuevos intereses en la utilización de zonas flotantes en campos de fuerza moderadamente intensos (inerciales, gravitatorios, electrostáticos, etc.) y sea imprescindible un análisis estático de la estabilidad, parece que los esfuerzos futuros deben dedicarse al análisis de los movimientos internos del líquido. En el Apéndice 2 se da una visión de conjunto sobre el estudio de las zonas flotantes.

APÉNDICE 1

INTERÉS DEL ESTUDIO DE LAS ZONAS LIQUIDAS FLOTANTES

MISIONES CIENTÍFICAS ESPACIALES DEL PROGRAMA SPACELAB

A. Geofísica

B. Astrofísica

C. Materiales

- Producción de metales, vidrios, monocristales, etc., ultrapuros, al no tener contacto con ningún recipiente. Obtención de monocristales grandes y perfectos - de semiconductores compuestos de los grupos III, IV y V para uso en electrónica, óptica, láser, etc.
- Obtención de fibras monocristalinas de muy alta resistencia a la tracción. Materiales compuestos de fibras de refuerzo (mecánico, térmico, etc.) embebidos en matrices metálicas o plásticas.
- Fundición de metales no miscibles.

D. Biología

- Separación de sustancias de interés: células, proteínas, sueros inmunizantes, etc., por electroforesis.
- Estudio de las funciones celulares básicas.
- Estudio sistemático del organismo humano.

La técnica de la zona flotante proporciona un conjunto

de posibilidades que capacitan para la realización de una gran parte de las misiones arriba especificadas: en particular, cuando se requiere disponer de masas fluidas controlables y con poca interacción con el "contenedor", que aquí se reduce a los soportes de los extremos.

APENDICE 2

PLANIFICACION DEL ESTUDIO DE LA ZONA FLOTANTE

1°. Hipótesis constitutivas

2°. Hidrostática

- Equilibrio
- Estabilidad

3°. Hidrodinámica

- Pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio
- Convección forzada
 - . Puesta en rotación
 - . Vibración
 - . Inyección de líquido
 - . Separación de los discos soporte
- Convección libre: principalmente debida a la variación del coeficiente de tensión superficial con la temperatura y con la concentración de solutos.

4°. Contrastación de los resultados en orden a criticar las hipótesis constitutivas.

- Experimentación.

PALABRAS CLAVE

Título : Hidrostática de la zona flotante

Autor : I. Martínez

Publicación: Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid

Palabras clave

Zona flotante (Floating Zone)

Estabilidad estática (Static Stability)

Superficies de revolución de curvatura constante (Surfacea of
Revolution of Constant Curvature)

Tensión superficial (Surface Tensión)

"HIDROSTATICA DE LA ZONA FLOTANTE"

Tesis Doctoral por I. Martínez Herranz

RESUMEN

Se trata de un estudio teórico sobre las formas de equilibrio y la estabilidad de masas líquidas mantenidas en ingravidez por fuerzas de tensión superficial entre dos discos coaxiales del mismo diámetro, en función de la separación entre los discos y del volumen de líquido. Como ampliación del estudio se han incluido los efectos de una pequeña gravedad residual y de la rotación, sobre las formas de equilibrio y su estabilidad.

El análisis de las formas de equilibrio es original en cuanto que presenta la solución de una manera gráfica directa, con lo cual, dados la separación y el volumen, se observa a simple vista si existe solución y, si existe, que forma tiene la superficie libre. Es útil, sobre todo, esta presentación, porque permite seguir de un modo sencillo e intuitivo las posibles evoluciones a que se puede someter una zona flotante (estirado a volumen constante, llenado, sucesión de formas cilíndricas, o cualquier otra ley), y todo ello hasta el límite de estabilidad, que marca el punto de rotura del puente líquido.

El estudio de la estabilidad de las zonas flotantes es completamente nuevo, pues sólo se habían dado los límites para configuraciones cilíndricas, ya que los valores que se habían deducido para zonas no cilíndricas suponiendo aplicable la teo-

ría de las películas jabonosas no son válidos a causa del efecto del volumen de líquido. Uno de los resultados más interesantes es el de que para zonas cortas (longitud/diámetro de los discos menor que 2) la rotura es simétrica, rompiéndose el puente en dos casquetes iguales uno adherido a cada disco, mientras que para zonas largas (esbeltez mayor que 2) la rotura es no simétrica, pasando a dos casquetes desiguales.

El efecto de la rotación axial de la zona presenta dos novedades: primero, se reducen los límites de estabilidad; segundo, puede dar lugar a un nuevo modo de rotura, modo C o en comba, hacia formas no axilsimétricas, aunque este curioso fenómeno sólo tiene lugar para valores suficientemente grandes de la velocidad de giro.

El efecto de una gravedad residual es equivalente al de la excentricidad en el problema del pandeo de columnas.

Las aplicaciones que hoy día tienen las zonas flotantes para mantener líquidos sin contacto con paredes (salvo los apoyos extremos) y las que se prevén para un futuro próximo, prometen una gran utilidad de estas investigaciones y justifican el esfuerzo dedicado.

"FLOATING ZONE HYDROSTATICS"

Doctoral Thesis by I, Martinez

ABSTRACT

An analytical solution of the equilibrium shapes and the static stability limits of liquid bridges held by surface tension between two coaxial disks has been presented following a variational approach. The more relevant remarks are the following:

Filling or removal of liquid in short zones does not present special features, but for slender zones a minimum volume of liquid is attained after which the liquid bridge disrupts; the breakage is symmetric, leading to two equal spherical caps one on each disk; finally, for zone-length/disk-diameter greater than 2 the breakage is non-symmetric leading to two different size caps.

The effect of solid-body rotation is important in two respects: first, it reduces the stability limits, and second, it provides a new mode of breakage, the skipping rope or C mode, through non-axisymmetric shapes; the liquid would leave the supports. This new instability can only occur for large spin rates.

The effect of microgravity is equivalent to that of the disalignment in a buckling problem.