DOS BANDAS SEMICILÍNDRICAS PARALELAS (TWO PARALLEL HEMICYLINDRICAL STRIPS)

Enunciado

Para un análisis térmico de un apéndice en un satélite geoestacionario, se quiere estudiar el intercambio radiativo entre dos bandas semicilíndricas delgadas, paralelas y coaxiales, de relación de radios $R_2/R_1=2$ e igual longitud $L>>R_2$, estando la mayor (2) con su cara convexa (externa, 2e) apuntando al Sol, y la menor (1) con su cara convexa (externa, 1e) apuntando en dirección opuesta. Para el caso en que todas las superficies radien idealmente y sea $R_1=20$ mm, se pide:

a) Factor de vista desde la cara interior de la banda 1 (1i) hacia la banda 2, por razonamiento deductivo basado en el álgebra de los factores de vista.
b) Factor de vista desde la cara exterior de la banda 1 (1e) hacia la banda 2, calculado por el método de las cuerdas.
c) Temperaturas que alcanzarían cada una de las bandas si no existiera la otra.
d) Plantear el balance térmico de la banda 2 (teniendo en cuenta la 1).
e) Si se obliga a que $T_1=300$ K, calcular T_2 y el valor de cada término del balance anterior.

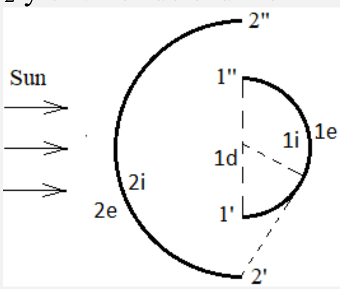

Fig. 1. Nomenclatura: caras 2e y 2i de la banda 2, superficie virtual diametral 1d, y caras 1y y 1e.

Solución

a) Factor de vista desde la cara interior de la banda 1 (1i) hacia la banda 2, por razonamiento deductivo basado en el álgebra de los factores de vista.

Si se considera el recinto limitado por 1d y 1i, el factor de vista de 1d a 1i es la unidad, $F_{1d1i}=1$, porque todos los rayos que salen de 1d van directamente a 1i (no así los que salen de 1i, que una parte incide sobre esa misma superficie por ser cóncava). De la relación de reciprocidad ($A_{1d}F_{1d1i}=A_{1i}F_{1i1d}$), y como las áreas son $A_{1d}=2R_1L$ y $A_{1i}=\pi R_1L$, se deduce que $F_{1i1d}=2/\pi=0{,}64$, que coincidirá con el buscado porque todos los rayos que atraviesan 1d inciden en 2i (o lo que es lo mismo, en 2, porque ninguno va por fuera); i.e. $F_{1i2}=2/\pi=0{,}64$, que significa que el 64 % de lo que emite 1i va a 2, y el otro 36 % es recibido por la misma superficie; $F_{1i1i}=1-F_{1i1d}=0{,}36$).

b) Factor de vista desde la cara exterior de la banda 1 (1e) hacia la banda 2, calculado por el método de las cuerdas.

Si numeramos los extremos como se ve en la Fig. 1 y tratamos de aplicar sin más la regla de las cuerdas:

$$F_{12}=\frac{\sum\text{crossed strings}-\sum\text{uncrossed strings}}{2\times(\text{source string})}=\frac{L_{1'2"}+L_{1"2'}-L_{1'2'}-L_{1"2"}}{2L_{1'1"}} \quad (1)$$

teniendo en cuenta que aquí el 1 es realmente nuestro 1e, pueden surgir dificultades, porque si se mide $L_{1'2''}$ por dentro sería $L_{1'2''}=3R_1$ (ya teniendo en cuenta que $R_2=2R_1$), estaríamos realmente calculando F_{1d2} y saldría $F_{1d2}=(3R_1+3R_1-R_1-R_1)/(2\cdot 2R_1)=1$, como era de esperar; mientras que si medimos $L_{1'2''}$ por fuera, calculando el ángulo central en la tangencia como $\theta=\arccos(1/2)=60°$, sería $L_{1'2''}=2R_1\sin\theta+(\pi-\theta)R_1=(1{,}73+\pi-\pi/3)R_1=3{,}82R_1$, y por tanto se obtendría $F_{1e2}=(3{,}82R_1+3{,}82R_1-R_1-R_1)/(2\pi R_1)=0{,}90$, que es demasiado grande, pues bien se ve en la Fig. 1 que la fracción de la radiación emergente de 1e que alcance a 2 será muy pequeña (la mayor parte irá hacia el vacío, a la derecha en la Fig. 1. La solución correcta se obtiene numerando con más cuidado los extremos, porque con la numeración de la Fig. 1 el factor de vista que se calcula es el del semicilindro enfrentado y no el opuesto, como puede verse en los apuntes. Teniendo en cuenta esto se obtiene el resultado correcto es $F_{1e2}=0{,}10$, que también se puede deducir viendo que si 1 fuese un cilindro completo (Fig. 2) sería $F_{12}=1/2$ por simetría, y aplicando la regla de la distribución para los factores de vista. El resultado es pues $F_{1e2}=0{,}10$.

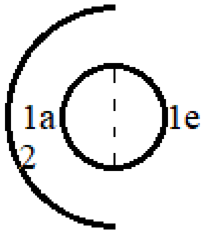

Fig. 2. Configuración auxiliar para calcular F_{1e2} a partir de F_{1a2}.

c) Temperaturas que alcanzarían cada una de las bandas si no existiera la otra.

Si están solas quedarán a la misma temperatura porque el balance energético es el mismo (si son cuerpos negros, que si no no (e.g. si todas fuesen blancas, la banda que recibiera el sol por la parte cóncava se calentaría más por reflexión solar). El balance térmico de la banda 2 (con caras 2e y 2i) en ausencia de la 1 es:

$$m_2c_2\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t}=\dot{W}_{\text{dis}}+\dot{Q}_{\text{in}}-\dot{Q}_{\text{out}} \quad\to\quad 0=0+\dot{Q}_{\text{in}}-\dot{Q}_{\text{out}}=\dot{Q}_{\text{in,2e}}-\left(\dot{Q}_{\text{out,2e}}+\dot{Q}_{\text{out,2i}}\right) \tag{2}$$

i.e. recibe calor del Sol por la cara 2e, pero sale calor por ambas caras 2e y 2i. Las cantidades, por unidad de longitud (i.e. en [W/m]), son:

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_{\text{in,2e}}&=EA_{\text{frontal}}=2R_2E\\
\dot{Q}_{\text{out,2e}}&=A_{2e}F_{2e3}\left(M_2-M_3\right)=\pi R_2\cdot 1\cdot\sigma\left[T_2^4-T_3^4\right]\\
\dot{Q}_{\text{out,2i}}&=A_{2i}F_{2i3}\left(M_2-M_3\right)=\pi R_2\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\sigma\left[T_2^4-T_3^4\right]
\end{aligned} \tag{3}$$

con lo que la temperatura estacionaria es (despreciando $T_3=2{,}7\ \text{K}\approx 0$):

$$0=2R_2E-\pi R_2\left(1+\frac{2}{\pi}\right)\sigma T_2^4 \quad\to\quad T_2=\left[\frac{2E}{(\pi+2)\sigma}\right]^{\frac{1}{4}}=\left[\frac{2\cdot 1361}{(\pi+2)\cdot 5.67\cdot 10^{-8}}\right]^{\frac{1}{4}}=311\ \text{K} \tag{4}$$

i.e. la banda semicilíndrica queda a T=311 K (38 ºC), tanto si apunta al Sol como si apunta opuestamente. Conviene insistir en que esta banda semicilíndrica, como cuerpo negro, emite $M=\sigma T^4$=530 W/m^2 por todas sus partes, pero en la cara convexa se reabsorbe parte de la emisión.

d) Plantear el balance térmico de la banda 2 (teniendo en cuenta la 1).

Ahora la banda 2 quedará más caliente de los 311 K anteriores, porque recibe algo de calor de la banda 1, que estará más caliente que el vacío anterior, por lo que a su vez recibe de la 2 (el 64 % de la emisión de la cara interior de la 2 (2i), que antes iba al vacío, ahora irá una parte a la banda 1, principalmente a su cara interna, 1i, y muy poco a la externa, 1e). El balance es ahora:

$$\begin{aligned}
&m_2 c_2 \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = \dot{W}_{\mathrm{dis}} + \dot{Q}_{\mathrm{in}} - \dot{Q}_{\mathrm{out}} \quad \rightarrow \quad 0 = \dot{Q}_{\mathrm{in,2e}} - \left(\dot{Q}_{\mathrm{out,2e}} + \dot{Q}_{\mathrm{out,2i1i}} + \dot{Q}_{\mathrm{out,2i1e}} + \dot{Q}_{\mathrm{out,2i3}}\right)\\
&\dot{Q}_{\mathrm{in,2e}} = EA_{\mathrm{frontal}} = 2R_2E\\
&\dot{Q}_{\mathrm{out,2e}} = A_{2e}F_{2e3}\left(M_2 - M_3\right) = \pi R_2 \cdot 1 \cdot \sigma\left[T_2^4 - T_3^4\right]\\
&\dot{Q}_{\mathrm{out,2i1i}} = A_{2i}F_{2i1i}\left(M_2 - M_1\right) = \pi R_2 \cdot 0,32 \cdot \sigma\left[T_2^4 - T_1^4\right]\\
&\dot{Q}_{\mathrm{out,2i1e}} = A_{2i}F_{2i1e}\left(M_2 - M_1\right) = \pi R_2 \cdot 0,05 \cdot \sigma\left[T_2^4 - T_1^4\right]\\
&\dot{Q}_{\mathrm{out,2i3}} = A_{2i}F_{2i3}\left(M_2 - M_3\right) = \pi R_2 \cdot 0,27 \cdot \sigma\left[T_2^4 - T_3^4\right]
\end{aligned} \qquad (5)$$

una vez sustituidos los factores de vista:

$$\begin{aligned}
&F_{2i1i} = \frac{A_{1i}F_{1i2i}}{A_{2i}} = \frac{\pi R_1 \frac{2}{\pi}}{\pi R_1} = \frac{1}{\pi} = 0,32\\
&F_{2i1e} = \frac{A_{1i}F_{1e2i}}{A_{2i}} = \frac{\pi R_1 \cdot 0,10}{\pi R_1} = 0,05\\
&F_{2i3} = 1 - F_{2i2i} - F_{2i1i} - F_{2i1e} = 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) - \frac{1}{\pi} - 0,05 = 1 - 0,36 - 0,32 - 0,05 = 0,27
\end{aligned} \qquad (6)$$

lo que sustituyendo en (5) permite resolver T_2 en función de T_1.

e) Si se obliga a que T_1=300 K, calcular T_2 y el valor de cada término del balance anterior.

Sustituyendo valores en los términos del balance térmico (5) con T_1=300 K, se obtiene T_2=325 K=52 ºC, y los términos del balance energético son:

$$0 = \dot{Q}_{\mathrm{in,2e}} - \left(\dot{Q}_{\mathrm{out,2e}} + \dot{Q}_{\mathrm{out,2i1i}} + \dot{Q}_{\mathrm{out,2i1e}} + \dot{Q}_{\mathrm{out,2i3}}\right) = 109 - \left(80 + 7 + 1 + 21\right) \qquad (7)$$

i.e. la banda 2 absorbe 109 W/m de radiación solar, y emite 80 W/m al vacío por delante, 21 W/m al vacío por detrás, e intercambia 8 W/m netos con la banda 1 (7 W/m con la cara 1i y 1 W/m con la 1e).

Nótese que probablemente habrá que alimentar eléctricamente la banda 1 para mantenerla a 300 K. Aparte puede verse el balance energético de la banda 1 en este caso (donde se obtiene como resultado que hace falta suministrar

$\dot{W}_{dis,1}$=7 W/m), y en el caso de que no se fijase su temperatura en 300 K sino que quedase en equilibrio radiativo (quedaría a T_1=281 K, y la otra a T_1=322 K).

Back to Spacecraft thermal control

Back to Heat and mass transfer

Back to Thermodynamics