© 1995-2025 by Isidoro Martínez

ESFERA CON ESCUDO SEMIESFÉRICO GRIS (SPHERE WITH GREY HEMISPHERICAL SHIELD)

Enunciado

Una esfera maciza de 0,25 m de diámetro está disipando 30 W en un recinto evacuado cuyas paredes se mantienen a 20 ºC. Sobre la esfera incide una radiación solar de 800 W/m^2, a través de una pequeña ventana. Se va a disponer un escudo semiesférico concéntrico con la esfera y de radio doble del de ésta, centrado en la dirección de la radiación incidente. Las propiedades termo-ópticas de la esfera maciza son α=0,9,y ε=0,8, y las de la cáscara semiesférica son α=0,4,y ε=0,8 por el exterior, y α=0,4,y ε=0,4 por el interior. Considerando las superficies isotermas y difusas, se pide:

a) Temperatura de la esfera en ausencia del escudo.
b) Plantear las ecuaciones necesarias cuando está el escudo.
c) Factores geométricos de la superficie interior del escudo.
d) Temperaturas del escudo y de la esfera.

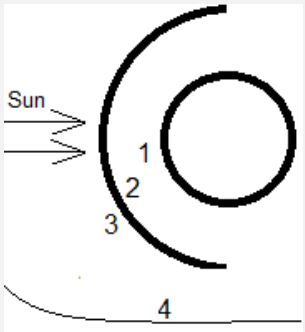

Fig. 1. Nomenclatura.

Solución

a) Temperatura de la esfera en ausencia del escudo.

Supondremos que la esfera (y luego también la semiesfera) va a tener temperatura uniforme (dependerá de las conductividades de los materiales. El balance energético es:

$$\frac{dE}{dt}=\dot{W}_{dis}+\dot{Q}_{in}-\dot{Q}_{out}=\dot{W}_{dis}+\alpha E A_{frontal}-A\left(M-M_4\right)=\dot{W}_{dis}+\alpha_1 E\pi R_1^2-\varepsilon_1\sigma\left[T_1^4-T_4^4\right]4\pi R_1^2 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad T_1=\left(T_0^4+\frac{\dot{W}_{dis}+\alpha_1 E\pi R_1^2}{\varepsilon_1\sigma 4\pi R_1^2}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(293^4+\frac{30+0.9\cdot 800\cdot\pi\cdot 0.125^2}{0.8\cdot 5.67\cdot 10^{-8}\cdot 4\cdot\pi\cdot 0.125^2}\right)^{\frac{1}{4}}=348\ \text{K}\ \ (75\ ^{\circ}\text{C}) \qquad (2)$$

siendo $\dot{W}_{dis}$ =30 W la potencia disipada, $\dot{Q}_{in}$ la absorción por radiación directa ($\dot{Q}_{in}=\alpha_1 E\pi R_1^2$ =0.9·800·π·0.125^2=35,3 W), y $\dot{Q}_{out}$ el intercambio por radiación infrarroja con las paredes ($\dot{Q}_{out}$ =65.3 W).

b) Plantear las ecuaciones necesarias cuando está el escudo.

Usando el método de las exitancias (radiosidades), el circuito eléctrico equivalente, y las ecuaciones nodales son:

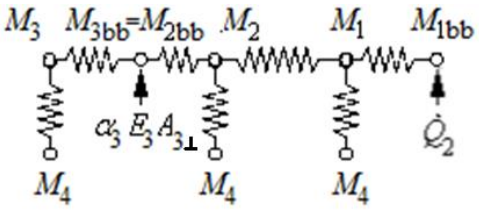

Fig. 2. Circuito eléctrico equivalente.

En el Método de las exitancias, por cada superficie *i* que compone el recinto aparecen tres ecuaciones:

$$\dot{Q}_{i,\mathrm{rad}} = \frac{M_i - M_{i,\mathrm{bb}}}{\frac{1-\varepsilon_i}{A_i\varepsilon_i}} = \sum_j \frac{M_j - M_i}{\frac{1}{A_i F_{ij}}} = \frac{dE}{\mathrm{d}t} - \dot{Q}_{\mathrm{i,con}} - \dot{W}_{\mathrm{i,dis}} \tag{3}$$

con tres incógnitas: $\dot{Q}_{i,\mathrm{rad}}$, M_i, y $M_{i,\mathrm{bb}}$ (o T_i, pues $M_{i,bb} = \sigma T_i^4$). Podemos dejar aparte $\dot{Q}_{i,\mathrm{rad}}$ y quedarnos con dos ecuaciones y dos incógnitas.

Para la cara convexa (3) del escudo semiesférico, con una deposición de energía proveniente de la absorción solar, y una salida por conducción hacia 2 (que será la que obligue a igualarse las temperaturas):

$$\frac{M_3 - M_{3bb}}{\frac{1-\varepsilon_3}{A_3\varepsilon_3}} = \frac{M_4 - M_3}{\frac{1}{A_3 F_{34}}} = -\alpha_3 A_{3,\mathrm{frontal}} E + \dot{Q}_{23\mathrm{cond}} \tag{4}$$

siendo $\dot{Q}_{23\mathrm{cond}}$ el calor que le transmite a 2; de momento vamos a distinguir los nodos 2 y 3, lo que permitiría resolver este problema incluso cuando el escudo fuese poco conductivo y hubiera que considerar $T_2 \neq T_3$. Para la cara cóncava (2) del escudo semiesférico, con entrada por conducción desde 3 (que tiende a igualar sus temperaturas):

$$\frac{M_2 - M_{2bb}}{\frac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}} = \frac{M_4 - M_2}{\frac{1}{A_2 F_{24}}} + \frac{M_1 - M_2}{\frac{1}{A_2 F_{21}}} = -\dot{Q}_{23\mathrm{cond}} \tag{5}$$

Y para la superficie esférica (1), con una deposición de energía eléctrica $\dot{W}_{\mathrm{dis}}$:

$$\frac{M_1 - M_{1bb}}{\frac{1-\varepsilon_1}{A_1\varepsilon_1}} = \frac{M_2 - M_1}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} + \frac{M_4 - M_1}{\frac{1}{A_1 F_{14}}} = -\dot{W}_{\mathrm{dis}} \tag{6}$$

Con este planteamiento tenemos 7 ecuaciones (las 6 anteriores más la de la conducción de calor de 3 a 2), con 7 incógnitas (M_3, M_{3bb}, M_{2bb}, M_2, M_{1bb}, M_1, y $\dot{Q}_{23\mathrm{cond}}$), pero como queremos que la conducción de 3 a 2 sea tan efectiva que iguale las temperaturas (i.e. que $M_{3bb}=M_{2bb}$), tenemos que eliminar $\dot{Q}_{23\mathrm{cond}}$ entre (4) y (5), quedando entonces esas 4 ecuaciones reducidas a estas 3:

$$\frac{M_3 - M_{3bb}}{\frac{1-\varepsilon_3}{A_3\varepsilon_3}} = \frac{M_4 - M_3}{\frac{1}{A_3 F_{34}}} \tag{7}$$

$$\frac{M_2 - M_{2bb}}{\frac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}} = \frac{M_4 - M_2}{\frac{1}{A_2F_{24}}} + \frac{M_1 - M_2}{\frac{1}{A_2F_{21}}} \tag{8}$$

$$\frac{M_3 - M_{3bb}}{\frac{1-\varepsilon_3}{A_3\varepsilon_3}} + \frac{M_2 - M_{2bb}}{\frac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}} = -\alpha_3 A_{3,\text{frontal}} E \tag{9}$$

Para resolver el sistema necesitamos conocer los factores de vista F_{ij}.

c) Factores geométricos de la superficie interior del escudo.

Con ayuda de la Table (Hemisphere):

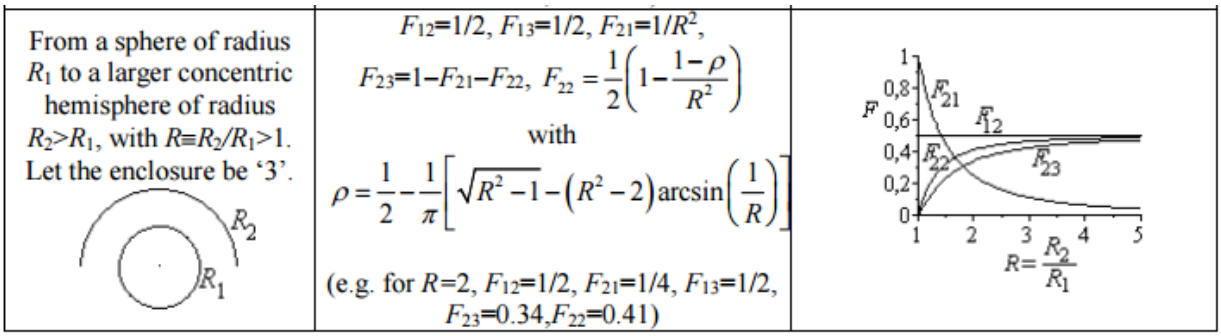

Fig. 3. Factor geométricos entre una esfera y una semiesfera concéntrica.

Para $R=R_2/R_1=2$, se obtiene $F_{12}=0{,}50$, $F_{21}=0{,}25$, $F_{22}=0{,}41$, y $F_{23}=0{,}34$.

d) Temperaturas del escudo y de la esfera.

Sustituyendo en las 5 ecuaciones ((7), (8), (9), y las dos de (6)) los valores:

$$\begin{aligned}
&A_3 = A_2 = 2\pi R_2^2 = 0{,}39\ \text{m}^2, \quad A_1 = 4\pi R_1^2 = 0{,}20\ \text{m}^2, \quad A_{3\text{frontal}} = \pi R_2^2 = 0{,}20\ \text{m}^2 \\
&M_4 = \sigma T_4^4 = 5{,}67\cdot 10^{-8}\cdot 293^4 = 419\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}, \quad M_{3\text{bb}} = M_{2\text{bb}}, \quad E = 800\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\
&F_{34} = 1, \quad F_{24} = 0{,}34, \quad F_{22} = 0{,}41, \quad F_{21} = 0{,}25, \quad F_{12} = 0{,}50, \quad F_{14} = 0{,}50 \\
&\alpha_3 = 0{,}40, \quad \varepsilon_3 = 0{,}80, \quad \alpha_2 = 0{,}40, \quad \varepsilon_2 = 0{,}40, \quad \alpha_1 = 0{,}90, \quad \varepsilon_1 = 0{,}80
\end{aligned} \tag{10}$$

quedan en la forma numérica:

$$\frac{M_3 - M_{3bb}}{\frac{1-\varepsilon_3}{A_3\varepsilon_3}} = \frac{M_4 - M_3}{\frac{1}{A_3F_{34}}} \quad \rightarrow 1.57\cdot M_3 - 1.57\cdot M_{2bb} = 164.10 - 0.39\cdot M_3 \tag{11}$$

$$\frac{M_2 - M_{2bb}}{\frac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}} = \frac{M_4 - M_2}{\frac{1}{A_2F_{24}}} + \frac{M_1 - M_2}{\frac{1}{A_2F_{21}}} \quad \rightarrow 0.26\cdot M_2 - 0.26\cdot M_{2bb} = 0.10\cdot M_1 - 0.23\cdot M_2 + 55.75 \tag{12}$$

$$\frac{M_3 - M_{3bb}}{\frac{1-\varepsilon_3}{A_3\varepsilon_3}} + \frac{M_2 - M_{2bb}}{\frac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}} = -\alpha_3 A_{3,\text{frontal}} E \rightarrow 1.57\cdot M_3 - 1.83\cdot M_{2bb} + 0.26\cdot M_2 = -62.83 \tag{13}$$

$$\frac{M_1 - M_{1bb}}{\frac{1-\varepsilon_1}{A_1\varepsilon_1}} = \frac{M_2 - M_1}{\frac{1}{A_1F_{12}}} + \frac{M_4 - M_1}{\frac{1}{A_1F_{14}}} \quad \rightarrow 0.79\cdot M_1 - 0.79\cdot M_{1bb} = 0.10\cdot M_2 - 0.20\cdot M_1 + 41.03 \tag{14}$$

$$\frac{M_1 - M_{1bb}}{\frac{1-\varepsilon_1}{A_1\varepsilon_1}} = -\dot{W}_{\text{dis}} \qquad \rightarrow 0.79 \cdot M_1 - 0.79 \cdot M_{1bb} = -30 \tag{15}$$

cuya solución es M_3=554 W/m^2, M_{2bb}=588 W/m^2, M_2=552 W/m^2, M_{1bb}=676 W/m^2, M_1=638 W/m^2, y por tanto:

$$T_2 = \left(M_{2bb}/\sigma\right)^{1/4} = 319 \text{ K } (46 \text{ ºC}) \tag{16}$$

$$T_1 = \left(M_{1bb}/\sigma\right)^{1/4} = 330 \text{ K } (57 \text{ ºC}) \tag{17}$$

i.e. vemos que la presencia del escudo reduce la temperatura de la esfera desde 75 ºC hasta 57 ºC.

Back to Spacecraft thermal control
Back to Heat and mass transfer
Back to Thermodynamics