ESFERA CON ESCUDO SEMIESFÉRICO GRIS (SPHERE WITH GREY HEMISPHERICAL SHIELD)

Enunciado

Una esfera maciza de 0,25 m de diámetro está disipando 30 W en un recinto evacuado cuyas paredes se mantienen a 20 ºC. Sobre la esfera incide una radiación solar de 800 W/m^2, a través de una pequeña ventana. Se va a disponer un escudo semiesférico concéntrico con la esfera y de radio doble del de ésta, centrado en la dirección de la radiación incidente. Las propiedades termo-ópticas de la esfera maciza son α=0,9,y ε=0,8, y las de la cáscara semiesférica son α=0,4,y ε=0,8 por el exterior, y α=0,4,y ε=0,4 por el interior. Considerando las superficies isotermas y difusas, se pide:

a) Temperatura de la esfera en ausencia del escudo.
b) Plantear las ecuaciones necesarias cuando está el escudo.
c) Factores geométricos de la superficie interior del escudo.
d) Temperaturas del escudo y de la esfera.

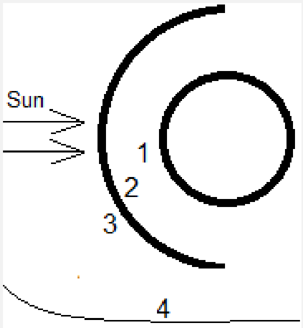

Fig. 1. Nomenclatura.

Solución

a) Temperatura de la esfera en ausencia del escudo.

Supondremos que la esfera (y luego también la semiesfera) va a tener temperatura uniforme (dependerá de las conductividades de los materiales. El balance energético es:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\dot{W}_{\text{dis}}+\dot{Q}_{\text{in}}-\dot{Q}_{\text{out}}=\dot{W}_{\text{dis}}+\alpha E A_{\text{frontal}}-A\left(M-M_4\right)=\dot{W}_{\text{dis}}+\alpha_1 E\pi R_1^2-\varepsilon_1\sigma\left[T_1^4-T_4^4\right]4\pi R_1^2 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow\quad T_1=\left(T_0^4+\frac{\dot{W}_{\text{dis}}+\alpha_1 E\pi R_1^2}{\varepsilon_1\sigma 4\pi R_1^2}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(293^4+\frac{30+0.9\cdot 800\cdot\pi\cdot 0.125^2}{0.8\cdot 5.67\cdot 10^{-8}\cdot 4\cdot\pi\cdot 0.125^2}\right)^{\frac{1}{4}}=348\text{ K}\ \ (75\text{ ºC}) \qquad (2)$$

siendo $\dot{W}_{\text{dis}}$=30 W la potencia disipada, $\dot{Q}_{\text{in}}$ la absorción por radiación directa ($\dot{Q}_{\text{in}}=\alpha_1 E\pi R_1^2$ =0.9·800·π·0.125^2=35,3 W), y $\dot{Q}_{\text{out}}$ el intercambio por radiación infrarroja con las paredes ($\dot{Q}_{\text{out}}$=65.3 W).

b) Plantear las ecuaciones necesarias cuando está el escudo.

Usando el método de las exitancias (radiosidades), el circuito eléctrico equivalente, y las ecuaciones nodales son:

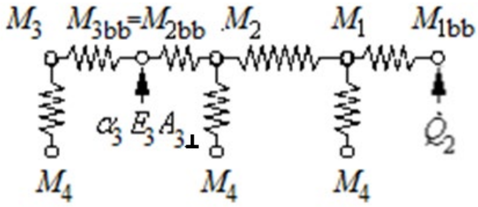

Fig. 2. Circuito eléctrico equivalente.

En el Método de las exitancias, por cada superficie i que compone el recinto aparecen tres ecuaciones:

$$\dot{Q}_{i,\text{rad}} = \frac{M_i - M_{i,\text{bb}}}{\frac{1-\varepsilon_i}{A_i\varepsilon_i}} = \sum_j \frac{M_j - M_i}{\frac{1}{A_i F_{ij}}} = \frac{dE}{\text{d}t} - \dot{Q}_{\text{i,con}} - \dot{W}_{\text{i,dis}} \tag{3}$$

con tres incógnitas: $\dot{Q}_{i,\text{rad}}$, M_i, y $M_{i,\text{bb}}$ (o T_i, pues $M_{i,bb} = \sigma T_i^4$). Podemos dejar aparte $\dot{Q}_{i,\text{rad}}$ y quedarnos con dos ecuaciones y dos incógnitas.

Para la cara convexa (3) del escudo semiesférico, con una deposición de energía proveniente de la absorción solar, y una salida por conducción hacia 2 (que será la que obligue a igualarse las temperaturas):

$$\frac{M_3 - M_{3bb}}{\frac{1-\varepsilon_3}{A_3\varepsilon_3}} = \frac{M_4 - M_3}{\frac{1}{A_3 F_{34}}} = -\alpha_3 A_{3,\text{frontal}} E + \dot{Q}_{23\text{cond}} \tag{4}$$

siendo $\dot{Q}_{23\text{cond}}$ el calor que le transmite a 2; de momento vamos a distinguir los nodos 2 y 3, lo que permitiría resolver este problema incluso cuando el escudo fuese poco conductivo y hubiera que considerar $T_2 \neq T_3$. Para la cara cóncava (2) del escudo semiesférico, con entrada por conducción desde 3 (que tiende a igualar sus temperaturas):

$$\frac{M_2 - M_{2bb}}{\frac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}} = \frac{M_4 - M_2}{\frac{1}{A_2 F_{24}}} + \frac{M_1 - M_2}{\frac{1}{A_2 F_{21}}} = -\dot{Q}_{23\text{cond}} \tag{5}$$

Y para la superficie esférica (1), con una deposición de energía eléctrica $\dot{W}_{\text{dis}}$:

$$\frac{M_1 - M_{1bb}}{\frac{1-\varepsilon_1}{A_1\varepsilon_1}} = \frac{M_2 - M_1}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} + \frac{M_4 - M_1}{\frac{1}{A_1 F_{14}}} = -\dot{W}_{\text{dis}} \tag{6}$$

Con este planteamiento tenemos 7 ecuaciones (las 6 anteriores más la de la conducción de calor de 3 a 2), con 7 incógnitas (M_3, $M_{3\text{bb}}$, $M_{2\text{bb}}$, M_2, $M_{1\text{bb}}$, M_1, y $\dot{Q}_{23\text{cond}}$), pero como queremos que la conducción de 3 a 2 sea tan efectiva que iguale las temperaturas (i.e. que $M_{3\text{bb}}=M_{2\text{bb}}$), tenemos que eliminar $\dot{Q}_{23\text{cond}}$ entre (4) y (5), quedando entonces esas 4 ecuaciones reducidas a estas 3:

$$\frac{M_3 - M_{3bb}}{\frac{1-\varepsilon_3}{A_3\varepsilon_3}} = \frac{M_4 - M_3}{\frac{1}{A_3 F_{34}}} \tag{7}$$

$$\frac{M_2 - M_{2bb}}{\dfrac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}} = \frac{M_4 - M_2}{\dfrac{1}{A_2 F_{24}}} + \frac{M_1 - M_2}{\dfrac{1}{A_2 F_{21}}} \tag{8}$$

$$\frac{M_3 - M_{3bb}}{\dfrac{1-\varepsilon_3}{A_3\varepsilon_3}} + \frac{M_2 - M_{2bb}}{\dfrac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}} = -\alpha_3 A_{3,\text{frontal}} E \tag{9}$$

Para resolver el sistema necesitamos conocer los factores de vista F_{ij}.

c) Factores geométricos de la superficie interior del escudo.

Con ayuda de la Table (Hemisphere):

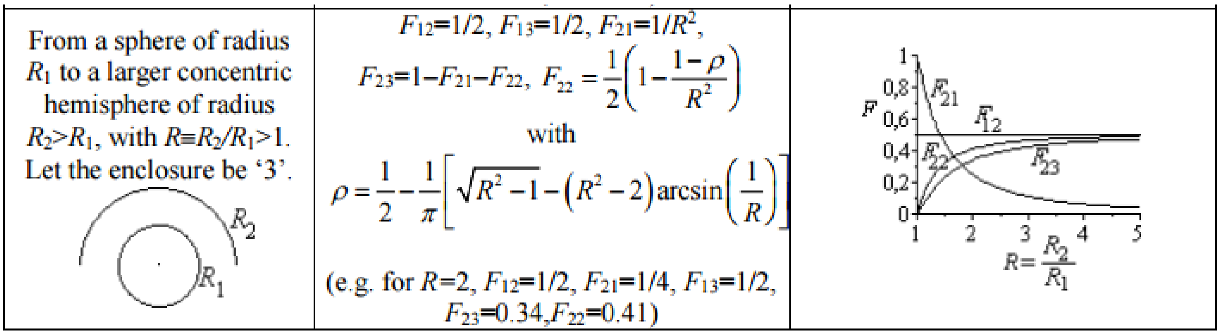

Fig. 3. Factor geométricos entre una esfera y una semiesfera concéntrica.

Para $R=R_2/R_1=2$, se obtiene $F_{12}=0{,}50$, $F_{21}=0{,}25$, $F_{22}=0{,}41$, y $F_{23}=0{,}34$.

d) Temperaturas del escudo y de la esfera.

Sustituyendo en las 5 ecuaciones ((7), (8), (9), y las dos de (6)) los valores:

$$\begin{aligned}
&A_3 = A_2 = 2\pi R_2^2 = 0{,}39\ \text{m}^2,\quad A_1 = 4\pi R_1^2 = 0{,}20\ \text{m}^2,\quad A_{3\text{frontal}} = \pi R_2^2 = 0{,}20\ \text{m}^2\\
&M_4 = \sigma T_4^4 = 5{,}67\cdot 10^{-8}\cdot 293^4 = 419\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2},\quad M_{3\text{bb}} = M_{2\text{bb}},\quad E = 800\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\\
&F_{34} = 1,\quad F_{24} = 0{,}34,\quad F_{22} = 0{,}41,\quad F_{21} = 0{,}25,\quad F_{12} = 0{,}50,\quad F_{14} = 0{,}50\\
&\alpha_3 = 0{,}40,\quad \varepsilon_3 = 0{,}80,\quad \alpha_2 = 0{,}40,\quad \varepsilon_2 = 0{,}40,\quad \alpha_1 = 0{,}90,\quad \varepsilon_1 = 0{,}80
\end{aligned} \tag{10}$$

quedan en la forma numérica:

$$\frac{M_3 - M_{3bb}}{\dfrac{1-\varepsilon_3}{A_3\varepsilon_3}} = \frac{M_4 - M_3}{\dfrac{1}{A_3 F_{34}}} \quad \rightarrow 1.57\cdot M_3 - 1.57\cdot M_{2bb} = 164.10 - 0.39\cdot M_3 \tag{11}$$

$$\frac{M_2 - M_{2bb}}{\dfrac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}} = \frac{M_4 - M_2}{\dfrac{1}{A_2 F_{24}}} + \frac{M_1 - M_2}{\dfrac{1}{A_2 F_{21}}} \quad \rightarrow 0.26\cdot M_2 - 0.26\cdot M_{2bb} = 0.10\cdot M_1 - 0.23\cdot M_2 + 55.75 \tag{12}$$

$$\frac{M_3 - M_{3bb}}{\dfrac{1-\varepsilon_3}{A_3\varepsilon_3}} + \frac{M_2 - M_{2bb}}{\dfrac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}} = -\alpha_3 A_{3,\text{frontal}} E \rightarrow 1.57\cdot M_3 - 1.83\cdot M_{2bb} + 0.26\cdot M_2 = -62.83 \tag{13}$$

$$\frac{M_1 - M_{1bb}}{\dfrac{1-\varepsilon_1}{A_1\varepsilon_1}} = \frac{M_2 - M_1}{\dfrac{1}{A_1 F_{12}}} + \frac{M_4 - M_1}{\dfrac{1}{A_1 F_{14}}} \quad \rightarrow 0.79\cdot M_1 - 0.79\cdot M_{1bb} = 0.10\cdot M_2 - 0.20\cdot M_1 + 41.03 \tag{14}$$

$$\frac{M_1 - M_{1bb}}{\frac{1-\varepsilon_1}{A_1\varepsilon_1}} = -\dot{W}_{\text{dis}} \qquad \rightarrow 0.79 \cdot M_1 - 0.79 \cdot M_{1bb} = -30 \qquad (15)$$

cuya solución es M_3=554 W/m^2, M_{2bb}=588 W/m^2, M_2=552 W/m^2, M_{1bb}=676 W/m^2, M_1=638 W/m^2, y por tanto:

$$T_2 = \left(M_{2bb}/\sigma\right)^{1/4} = 319\ \text{K}\ (46\ ^{\text{o}}\text{C}) \qquad (16)$$

$$T_1 = \left(M_{1bb}/\sigma\right)^{1/4} = 330\ \text{K}\ (57\ ^{\text{o}}\text{C}) \qquad (17)$$

i.e. vemos que la presencia del escudo reduce la temperatura de la esfera desde 75 ºC hasta 57 ºC.

[Back to Spacecraft thermal control]
[Back to Heat and mass transfer]
[Back to Thermodynamics]