

ALETA BLANCA SOBRE UNA PLACA BLANCA (WHITE FIN NORMAL TO A WHITE PLATE)

Enunciado

Para un estudio térmico de un apéndice en un satélite geoestacionario, considérese una placa cuadrada de aluminio anodizado (A-7075) de 0,8 m de lado y 2 mm de espesor, mantenida a 300 K, y pintada de negro. El apéndice es un panel en nido de abeja, de 1 cm de espesor, 10 cm de altura y 80 cm de anchura, centrada sobre la placa grande, el cual recibe perpendicularmente los rayos del Sol (ver figura). Este panel está formado por dos láminas de fibra de carbono (CFRP) de 0,5 mm de espesor con acabado en negro, unidas por láminas de aluminio (Al-5052) de 20 μm de espesor y 5 mm de anchura de celda. Suponiendo despreciable la conductancia térmica en la unión con la placa grande, se pide:

- Calcular aproximadamente todos los factores geométricos a partir del valor F_{12} (factor geométrico desde un lado del panel vertical hacia el lado contiguo de la placa base), determinando el valor de este en el límite de placa base infinita.
- Calcular los factores geométricos verdaderos (sin la aproximación anterior).
- Determinar las temperaturas de las caras del panel vertical en estado estacionario, y el valor de cada uno de los términos del balance energético del panel.
- Resolver ahora suponiendo que la cara iluminada está pintada de blanco.
- Comparar los resultados anteriores (*c* y *d*) con los que se obtendría si no existiese la placa horizontal.
- Suponiendo que las caras superiores de la placa horizontal se recubren con una manta aislante negra (una MLI pintada de negro), y considerando que sus temperaturas superficiales van a ser diferentes, determinar todas las temperaturas (con la cara iluminada pintada de negro).
- Repetir el cálculo anterior pero con la cara iluminada pintada de blanco.

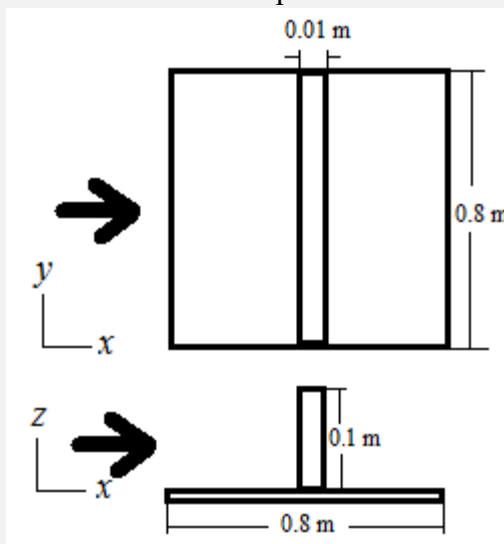


Fig. 1. Geometría y dimensiones.

Solución

- Calcular aproximadamente todos los factores geométricos a partir del valor F_{12} (factor geométrico desde un lado del panel vertical hacia el lado contiguo de la placa base), determinando el valor de este en el límite de placa base infinita.

Sea F_{12} el factor geométrico desde un lado del panel vertical (e.g. el izquierdo) hacia el lado visto de la placa base. Es fácil ver que $F_{12}=1/2$ si la placa base fuera infinita, pues, de la radiación emitida por el panel, la mitad iría hacia abajo y la otra mitad hacia arriba, por simetría.

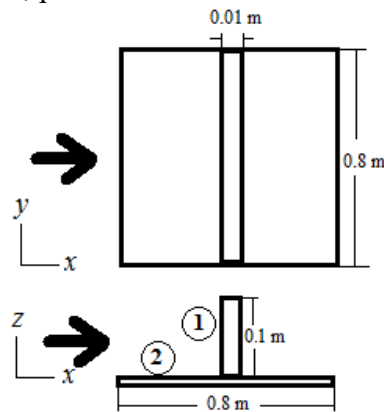


Fig. 2. Nomenclatura.

Por reciprocidad, $F_{21}=A_1 \cdot F_{12}/A_2=0,1 \cdot 0,5/0,4=0,125$ habiendo despreciado el espesor de la aleta (si no, $F_{21}=0,127$), y por completitud $F_{13}=1-F_{12}=0,5$ y $F_{23}=1-F_{21}=0,875$ (o $F_{23}=0,873$).

b) Calcular los factores geométricos verdaderos (sin la aproximación anterior).

Usando la expresión analítica exacta de la [Tabla](#) para el factor de vista entre dos superficies rectangulares unidas por sus bordes y a 90° , con relaciones de aspecto $w=0,4/0,8=0,5$ y $h=0,1/0,8=0,125$ se obtiene $F_{12}=0,401$ ($F_{12}=0,4014$ para poder mejor compararlo con el valor $F_{12}=0,4009$ que se obtendría si no se desprecia el espesor de aleta, i.e. si se toma el nodo 2 como $0,395 \cdot 0,8 \text{ m}^2$ en vez de $0,4 \cdot 0,8 \text{ m}^2$). Si en lugar de los $0,8 \text{ m}$ de envergadura, se hubiera usado la fórmula para envergadura infinita, en vez de $F_{12}=0,401$ se hubiera obtenido $F_{12}=0,438$ (y con todas las dimensiones infinitas, ya vimos que era $F_{12}=0,5$).

c) Determinar las temperaturas de las caras del panel vertical en estado estacionario, y el valor de cada uno de los términos del balance energético del panel.

Recordemos el procedimiento general:

1. Elección de nodos (elementos discretos con una sola temperatura representativa).
2. Identificación de fuentes y sumideros de calor.
3. Identificación de los caminos térmicos.
4. Planteamiento de las ecuaciones nodales (balance energético en cada nodo).
5. Obtención del conjunto de temperaturas nodales.

La temperatura suele variar espacial y temporalmente, $T(x,y,z,t)$; en nuestro caso estacionario, y limitándonos a la cara 1, habrá una $T(x,y)$ que será máxima en la parte central inferior, y mínima en las partes extremas superiores. Pero conviene empezar con modelos sencillos e ir añadiendo detalles según sea necesario.

Como primera aproximación, sólo consideraremos la temperatura media (i.e. un nodo), y supondremos que todas las superficies se comportan como cuerpos negros. El nodo 1 así elegido, intercambia calor por radiación con los nodos 2 y 3 (Fig. 2), y también por conducción con el nodo 1'.

Para plantear los balances energéticos en cada nodo, incluimos los términos no estacionarios para cálculos posteriores, pero sin especificar de momento las capacidades térmicas de cada uno. En la cara iluminada (nodo 1), y en la posterior (nodo 1'):

$$m_1 c_1 \frac{dT_1}{dt} = EA_1 - A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - A_1 F_{13} \sigma (T_1^4 - T_\infty^4) - k A_1 \frac{T_1 - T_{1'}}{\delta} \quad (1)$$

$$m_{1'} c_{1'} \frac{dT_{1'}}{dt} = -A_{1'} F_{1'2} \sigma (T_{1'}^4 - T_2^4) - A_{1'} F_{1'3} \sigma (T_{1'}^4 - T_\infty^4) + k A_1 \frac{T_1 - T_{1'}}{\delta} \quad (2)$$

resultando dos ecuaciones con dos incógnitas (T_1 y $T_{1'}$), con $d/dt=0$ por ser estacionario, $E=1370 \text{ W/m}^2$ para la irradiancia terrestre media, $A_1=A_{1'}=0,8 \cdot 0,1=0,08 \text{ m}^2$, $F_{12}=0,401$, $T_2=300 \text{ K}$, $F_{13}=0,599$, $T_\infty=2,7 \text{ K}$ (temperatura de fondo del universo), $\delta=0,01 \text{ m}$ el espesor del panel, y k la conductividad efectiva a través del panel, que, en función de los parámetros del nido de abeja (Fig. 3) y tomando sólo la conducción a través de las laminillas (i.e, sin contar la radiación entre caras) resulta:

$$k = k_{Al} \frac{8 \delta_{Al}}{3 s} \quad (3)$$

que con $k_{Al}=140 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ para el [Al-5052](#), $\delta_{Al}=20 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, y $s=5 \text{ mm}$, da un valor efectivo de $k=1,49 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, resultando finalmente $T_1=354 \text{ K}$ ($81 \text{ }^\circ\text{C}$) y $T_{1'}=350 \text{ K}$ ($77 \text{ }^\circ\text{C}$). Nótese la influencia del aluminio; si el núcleo del panel fuese de plástico con $k_{pl}=0,25 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, en vez de aluminio, sería $k=0,003 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ y resultaría $T_1=404 \text{ K}$ ($131 \text{ }^\circ\text{C}$) y $T_{1'}=252 \text{ K}$ ($-21 \text{ }^\circ\text{C}$).

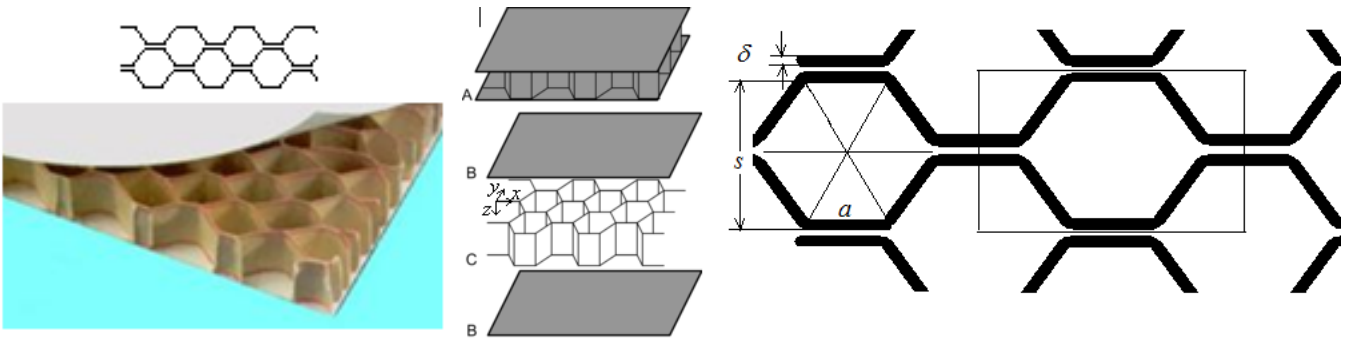


Fig. 3. Panel de nido de abeja.

Siguiendo con el modelo de superficies negras en estacionario, con el resultado anterior, $T_1=354 \text{ K}$ y $T_{1'}=350 \text{ K}$, los términos de los balances energéticos en cada nodo son:

$$\underbrace{m_1 c_1 \frac{dT_1}{dt}}_0 = \underbrace{EA_1}_{110 \text{ W}} - \underbrace{A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4)}_{14 \text{ W}} - \underbrace{A_1 F_{13} \sigma (T_1^4 - T_\infty^4)}_{43 \text{ W}} - \underbrace{k A_1 \frac{T_1 - T_{1'}}{\delta}}_{53 \text{ W}} \quad (4)$$

$$\underbrace{m_{1'} c_{1'} \frac{dT_{1'}}{dt}}_0 = - \underbrace{A_{1'} F_{1'2} \sigma (T_{1'}^4 - T_2^4)}_{13 \text{ W}} - \underbrace{A_{1'} F_{1'3} \sigma (T_{1'}^4 - T_\infty^4)}_{41 \text{ W}} + \underbrace{k A_1 \frac{T_1 - T_{1'}}{\delta}}_{53 \text{ W}} \quad (5)$$

(la pequeña discrepancia en este último balance es debida al redondeo).

d) Resolver ahora suponiendo que la cara iluminada está pintada de blanco.

Si no son todas las superficies negras, ya no vale $\dot{Q}_{i,\text{rad}} = \sum_j A_i F_{ij} \sigma (T_j^4 - T_i^4) = dE_i/dt - \dot{Q}_{i,\text{cond}} - \dot{Q}_{i,\text{conv}}$, y en general habría que usar el método de las exitancias:

$$\dot{Q}_{i,\text{rad}} = \frac{M_i - M_{i,\text{bb}}}{\frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i}} = \sum_j \frac{M_j - M_i}{\frac{1}{A_i F_{ij}}} = \frac{dE}{dt} - \dot{Q}_{i,\text{cond}} - \dot{Q}_{i,\text{conv}} \quad (6)$$

aunque si sólo hay una superficie no-negra y es convexa, basta usar $\dot{Q}_{i,\text{rad}} = \sum \varepsilon_i A_i F_{ij} \sigma (T_j^4 - T_i^4) = dE_i/dt - \dot{Q}_{i,\text{cond}} - \dot{Q}_{i,\text{conv}}$, además de tener en cuenta que solo absorbe una parte de la radiación solar. Los balances energéticos en la cara iluminada (la blanca, 1), y en la posterior (la 1', supuesta negra) serán:

$$m_1 c_1 \frac{dT_1}{dt} = \alpha_1 E A_1 - \varepsilon_1 A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - \varepsilon_1 A_1 F_{13} \sigma (T_1^4 - T_\infty^4) - k A_1 \frac{T_1 - T_{1'}}{\delta} \quad (7)$$

$$m_{1'} c_{1'} \frac{dT_{1'}}{dt} = -A_{1'} F_{1'2} \sigma (T_{1'}^4 - T_2^4) - A_{1'} F_{1'3} \sigma (T_{1'}^4 - T_\infty^4) + k A_1 \frac{T_1 - T_{1'}}{\delta} \quad (8)$$

que con $\alpha_1=0,20$ y $\varepsilon_1=0,85$ para la cara blanca, según la [Tabla](#), da $T_1=277$ K (en vez de 354 K) y $T_{1'}=276$ K (en vez de 350 K). Los términos de los balances energéticos en cada nodo son ahora:

$$\underbrace{m_1 c_1 \frac{dT_1}{dt}}_0 = \underbrace{\alpha_1 E A_1}_{22 \text{ W}} - \underbrace{\varepsilon_1 A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4)}_{-3 \text{ W}} - \underbrace{\varepsilon_1 A_1 F_{13} \sigma (T_1^4 - T_\infty^4)}_{14 \text{ W}} - \underbrace{k A_1 \frac{T_1 - T_{1'}}{\delta}}_{12 \text{ W}} \quad (9)$$

$$\underbrace{m_{1'} c_{1'} \frac{dT_{1'}}{dt}}_0 = -\underbrace{A_{1'} F_{1'2} \sigma (T_{1'}^4 - T_2^4)}_{-4 \text{ W}} - \underbrace{A_{1'} F_{1'3} \sigma (T_{1'}^4 - T_\infty^4)}_{16 \text{ W}} + \underbrace{k A_1 \frac{T_1 - T_{1'}}{\delta}}_{12 \text{ W}} \quad (10)$$

i.e. la cara 1 recibe del Sol 22 W y otros 3 W de la placa de abajo, y de estos 25 W pasan 11 W por conducción a la capa posterior y otros 14 W salen por radiación al espacio (téngase en cuenta el redondeo), mientras que la cara 1' recibe los 12 W de la 1 más 4 W de la 2', y emite los 16 W al espacio.

Nótese que el reflejo solar en la cara 1 calentaría la 2, pero como se regula su temperatura, no interviene aquí.

e) Comparar los resultados anteriores (c y d) con los que se obtendría si no existiese la placa horizontal.

Bastaría con poner en los balances anteriores $T_2=T_{2'}=2.7$ K, pero vamos a plantearlo de nuevo:

$$m_1 c_1 \frac{dT_1}{dt} = \alpha_1 E A_1 - \varepsilon_1 A_1 F_{13} \sigma (T_1^4 - T_\infty^4) - k A_1 \frac{T_1 - T_{1'}}{\delta} \quad (11)$$

$$m_1 c_1 \frac{dT_1'}{dt} = -A_1 F_{13} \sigma (T_1'^4 - T_\infty^4) + k A_1 \frac{T_1 - T_1'}{\delta} \quad (12)$$

aunque al no haber ahora placa abajo, sería $F_{13}=1$. Los resultados son:

- Para el caso de cara negra ($\alpha=\varepsilon=1$), $T_1=334$ K, $T_1'=330$ K, la cara 1 absorbe 110 W, emite 56 W y pasa 53 W al nodo 1', que los emite al vacío.
- Para el caso de cara blanca ($\alpha=0,20$ y $\varepsilon=0,85$), $T_1=227$ K, $T_1'=226$ K, la cara 1 absorbe 22 W, emite 10 W y pasa 12 W al nodo 1', que los emite al vacío.

f) Suponiendo que las caras superiores de la placa horizontal se recubren con una manta aislante negra (una MLI pintada de negro), y considerando que sus temperaturas superficiales van a ser diferentes, determinar todas las temperaturas (con la cara iluminada pintada de negro).

Si en vez de estar a $T_2=300$ K estuviesen aisladas por abajo, y despreciando la conducción longitudinal de 2 a 2', tendremos ahora 4 nodos (1,1',2,2') cuyos balances energéticos son (todos cuerpos negros):

$$m_1 c_1 \frac{dT_1}{dt} = EA_1 - A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - A_1 F_{13} \sigma (T_1^4 - T_\infty^4) - k A_1 \frac{T_1 - T_1'}{\delta} \quad (13)$$

$$m_1 c_1 \frac{dT_1'}{dt} = -A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - A_1 F_{13} \sigma (T_1^4 - T_\infty^4) + k A_1 \frac{T_1 - T_1'}{\delta} \quad (14)$$

$$m_2 c_2 \frac{dT_2}{dt} = A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - A_2 F_{23} \sigma (T_2^4 - T_\infty^4) \quad (15)$$

$$m_2 c_2 \frac{dT_2'}{dt} = A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - A_2 F_{23} \sigma (T_2^4 - T_\infty^4) \quad (16)$$

que en régimen estacionario dan $T_1=337$ K, $T_1'=333$ K, $T_2=191$ K, $T_2'=189$ K.

g) Repetir el cálculo anterior pero con la cara iluminada pintada de blanco.

Ahora hay que tener en cuenta, no solo que el nodo 1 absorbe menos, sino que la reflexión solar en él influye en la T_2 (que antes estaba regulada a $T_2=300$ K). El coeficiente de reflexión solar (albedo) será $\rho=1-\alpha$ (en nuestro caso $\rho=1-0,2=0,8$). Las ecuaciones nodales serán ahora:

$$m_1 c_1 \frac{dT_1}{dt} = \alpha_1 EA_1 - \varepsilon_1 A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - \varepsilon_1 A_1 F_{13} \sigma (T_1^4 - T_\infty^4) - k A_1 \frac{T_1 - T_1'}{\delta} \quad (17)$$

$$m_1 c_1 \frac{dT_1'}{dt} = -A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - A_1 F_{13} \sigma (T_1^4 - T_\infty^4) + k A_1 \frac{T_1 - T_1'}{\delta} \quad (18)$$

$$m_2 c_2 \frac{dT_2}{dt} = \varepsilon_1 A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) + \rho_1 EA_1 F_{12} - A_2 F_{23} \sigma (T_2^4 - T_\infty^4) \quad (19)$$

$$m_2 c_2 \frac{dT_2'}{dt} = A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) - A_2 F_{23} \sigma (T_2^4 - T_\infty^4) \quad (20)$$

Nótese que en el balance del nodo 1 sólo influye indirectamente la reflexión solar a través de la T_2 , ya que al ser la superficie 2 negra no refleja nada. En el balance del nodo 2 se aprecian dos aportes netos del nodo 1 (emisión

infrarroja neta, y reflexión solar) y una salida al nodo 3 (espacio vacío). En régimen estacionario el resultado es ahora $T_1=237$ K, $T_{1'}=236$ K, $T_2=220$ K, $T_{2'}=134$ K, con los valores siguientes de los términos de los balances térmicos:

$$\underbrace{m_1 c_1 \frac{dT_1}{dt}}_0 = \underbrace{\alpha_1 EA_1}_{22 \text{ W}} - \underbrace{\varepsilon_1 A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4)}_{1 \text{ W}} - \underbrace{\varepsilon_1 A_1 F_{13} \sigma (T_1^4 - T_\infty^4)}_{7 \text{ W}} - \underbrace{k A_1 \frac{T_1 - T_{1'}}{\delta}}_{13 \text{ W}} \quad (21)$$

$$\underbrace{m_1 c_1 \frac{dT_{1'}}{dt}}_0 = - \underbrace{A_1 F_{1'2} \sigma (T_{1'}^4 - T_2^4)}_5 - \underbrace{A_1 F_{1'3} \sigma (T_{1'}^4 - T_\infty^4)}_8 + \underbrace{k A_1 \frac{T_1 - T_{1'}}{\delta}}_{13} \quad (22)$$

$$\underbrace{m_2 c_2 \frac{dT_2}{dt}}_0 = \underbrace{\varepsilon_1 A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4)}_{1 \text{ W}} + \underbrace{\rho_1 EA_1 F_{12}}_{35 \text{ W}} - \underbrace{A_2 F_{23} \sigma (T_2^4 - T_\infty^4)}_{36 \text{ W}} \quad (23)$$

$$\underbrace{m_2 c_2 \frac{dT_{2'}}{dt}}_0 = \underbrace{A_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_{2'}^4)}_{5 \text{ W}} - \underbrace{A_2 F_{23} \sigma (T_{2'}^4 - T_\infty^4)}_{5 \text{ W}} \quad (24)$$

donde, como antes, la ligera discrepancia en (21) es debida al redondeo.

[Back to Spacecraft thermal control](#)

[Back to Heat and mass transfer](#)

[Back to Thermodynamics](#)