

Statement

Consider a thin square plate 0.1 m in size, which is an appendage in a geostationary satellite. We ask:

- Thermal balance in a general case, neglecting the coupling with the rest of the satellite. Estimate the possible terrestrial contribution.
- Electrical power required for the plate to not cool below 50 °C, as a function of solar inclination, in cases where both surfaces of the plate are either black or white.
- Electrical power required to maintain the plate at 50 °C perpendicular to the Sun direction, as a function of the α/ε ratio, assuming that the back face is insulated with an MLI.
- Temperature reached by the plate, frontal, painted white, and isolated from behind, without dissipation.
- Establish the thermal balances of that plate and another one of the same size, put 10 mm in front of the former, and painted black on both sides. Find the stationary temperatures.
- Repeat the previous point but with all the faces painted white.

Se requiere un análisis térmico de una placa plana delgada, cuadrada y de 0,1 m de lado, que es un apéndice en un satélite geoestacionario. Se pide:

- Plantear su balance térmico en un caso general, iluminado por el Sol, pero despreciando el acoplamiento con el resto del satélite. Estimar la posible contribución terrestre.
- Potencia eléctrica requerida para que la placa no se enfríe por debajo de 50 °C, en función de la inclinación solar, en los casos en que ambas superficies sean negras o que sean blancas.
- Potencia eléctrica requerida para mantener la placa a 50 °C con Sol frontal, en función de la relación α/ε , suponiendo que la cara posterior está aislada con una MLI.
- Temperatura que alcanzaría la placa pintada de blanco por delante y aislada por atrás, enfrentada al Sol (sin disipación).
- Plantear los balances térmicos si se dispone delante de la placa antedicha otra placa igual, toda pintada de negro, separada 10 mm de la anterior, y calcular las temperaturas estacionarias.
- Repetir el punto anterior pero con todas las caras pintadas de blanco.

Solución

Sol. a)

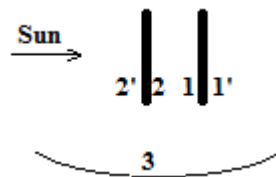


Fig. 1. Configuración (inicialmente solo la placa 1).

El balance térmico de la placa 1 es:

$$\frac{dE_{th}}{dt} = \dot{W}_{dis} + \dot{Q}_{in} - \dot{Q}_{out} = \dot{W}_{dis} + \dot{Q}_s + \dot{Q}_a + \dot{Q}_p - \dot{Q}_{\infty} \quad (1)$$

$$C \frac{dT}{dt} = \dot{W}_{dis} + \alpha EA \cos \beta + \alpha \rho_p E A F_{12} F_a + \varepsilon \varepsilon_p \sigma T_p^4 A F_{12} - 2A \varepsilon \sigma (T^4 - T_{\infty}^4) \quad (2)$$

siendo C la capacidad térmica (global), \dot{W}_{dis} la potencia eléctrica suministrada (disipada), \dot{Q}_s la potencia absorbida directamente del Sol, $\dot{Q}_s = \alpha EA \cos \beta$, por la placa de área proyectada $A \cos \beta$ y absortancia solar a (tomaremos para la irradiancia solar su valor medio en órbita terrestre, $E=1361 \text{ W/m}^2$, aunque varía entre 1315 W/m^2 en el afelio (julio), y 1405 W/m^2 en el perihelio (enero)); en cuanto al calentamiento por reflexión solar en la Tierra (albedo), aparte de depender de la absortancia solar de la placa (α), de la reflectancia solar del planeta (ρ_p), y del factor de vista desde la placa al planeta (F_{12}), depende de la posición relativa del punto subsolar y el punto subsatélite, usándose normalmente la aproximación $F_a = \cos \theta$, siendo θ el ángulo central que subtienden dichos puntos; el calentamiento por radiación infrarroja terrestre, $\dot{Q}_p = \varepsilon \varepsilon_p \sigma T_p^4 A F_{12}$, se supone constante, y por último el enfriamiento de la placa por emisión infrarroja se pone como si emitiera en los 4π estereorradianes (de ahí el contar el área de las dos caras, $2A$) porque en el \dot{Q}_p sólo se contabilizó la recepción, no el intercambio.

Por otra parte, suele suponerse, como aquí, que la radiación solar es unidireccional, por lo que una placa plana alineada con el Sol no recibiría nada de radiación, pero el tamaño finito del disco solar influiría algo; para distancias del orden de la del Sol a la Tierra (1 ua), esto supondría unos 10^{-6} W/m^2 .

El máximo de calentamiento por la presencia de la Tierra en GEO corresponderá a una placa negra mirando a la Tierra y alineada con el Sol (i.e. cuando $\theta=0$), en cuyo caso el factor de vista es ([Patch to frontal sphere](#)) $F_{12}=1/h^2$, siendo $h=R_{GEO}/R_E=42100/6380=6,60$, y por tanto $F_{12}=0,023$, con lo que los valores máximos son $\dot{Q}_a/A = \rho_p E F_{12} = 0,30 \cdot 1361 \cdot 0,023 = 9,39 \text{ W/m}^2$ (habiendo tomado un albedo medio del 30 %), y $\dot{Q}_p/A = \varepsilon_p \sigma T_p^4 F_{12} = 0,61 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 288^4 \cdot 0,023 = 5,47 \text{ W/m}^2$ (habiendo tomado una emisividad media del 61 % correspondiente a una emisión extraterrestre de 240 W/m^2).

Comparando estos valores máximos de calentamiento debido a la Tierra ($9,4 \text{ W/m}^2$ por albedo y $5,5 \text{ W/m}^2$ por IR), con el calentamiento debido al Sol (1361 W/m^2), y cuenta tenida de las incertidumbres en los valores medios, se concluye que pueden despreciarse los calentamientos terrestres.

Sol. b)

Despejando de (2) la potencia eléctrica requerida para que la placa no se enfríe por debajo de $50 \text{ }^\circ\text{C}$, en función de la inclinación solar, en régimen estacionario, queda:

$$\dot{W}_{dis} = 2A \varepsilon \sigma (T_{min}^4 - T_{\infty}^4) - \alpha EA \cos \beta \quad (3)$$

Para el límite de cuerpo negro ($\varepsilon=\alpha=1$), con $A=L^2=0,1^2=0,01 \text{ m}^2$, $T_{min}=50 \text{ }^\circ\text{C}=323 \text{ K}$, y despreciando $T_{\infty}=2,7 \text{ K}$, queda $\dot{W}_{dis} = 12,4 - 13,6 \cdot \cos \beta \text{ [W]}$, i.e. si la placa estuviese de canto (no soleada, $\beta=90^\circ$), habría que calentar con $\dot{W}_{dis} = 12,4 \text{ W}$, pero si la placa está de frente al Sol, sería necesario refrigerarla para mantenerla a $50 \text{ }^\circ\text{C}$ ($\dot{W}_{dis} = 12,4 - 13,6 = -1,2 \text{ W}$), lo que en la práctica se traduciría en que no se puede mantener por debajo de $50 \text{ }^\circ\text{C}$.

Para el límite de placa blanca, tomando valores típicos de [propiedades termoópticas para pintura blanca](#), $\alpha=0,20$, $\varepsilon=0,85$, queda $\dot{W}_{dis} = 10,5 - 2,72 \cdot \cos \beta \text{ [W]}$, i.e. si la placa estuviese de canto (no soleada, $\beta=90^\circ$), habría que Sunlit plate in geostationary orbit

calentar con $\dot{W}_{\text{dis}}=10,5$ W, y si la placa está de frente al Sol, sería necesario calentar con $\dot{W}_{\text{dis}}=10,5-2,7=7,8$ W para mantenerla a 50 °C..

Sol. c)

Para mantener la placa a 50 °C con Sol frontal, en función de la relación α/ε , suponiendo que la cara posterior está térmicamente aislada (con una manta MLI), el balance (3) deviene:

$$\dot{W}_{\text{dis}} = A\varepsilon\sigma(T_{\text{min}}^4 - T_{\infty}^4) - \alpha EA \cos \beta \tag{4}$$

quedando $\dot{W}_{\text{dis}}=6,18-13,6 \cdot \alpha/\varepsilon$ [W], i.e. si la relación α/ε es $>0,45$, entonces la placa (aislada por atrás) se calentaría por encima de 50 °C y habría que refrigerar (poco práctico), mientras que para $\alpha/\varepsilon < 0,45$ sí que habrá que calentar, como se ha visto para la pintura blanca, que tenía $\alpha/\varepsilon=0,20/0,85=0,24$.

Sol. d)

Si se deja esa placa blanca (aislada por atrás) enfrentada al Sol y sin disipación ($\dot{W}_{\text{dis}}=0$) alcanzaría una temperatura, resolviendo (4), de $T=274$ K (1 °C), absorbiendo una energía solar de $\dot{Q}_s = \alpha EA = 0,2 \cdot 1361 \cdot 0,01 = 2,7$ W, y emitiéndolos en el IR, $\dot{Q}_p = \varepsilon A \sigma T^4 = 0,85 \cdot 0,01 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 274^4 = 2,7$ W.

Sol. e)

Sea (1) el subíndice para la cara frontal de la placa original, (2) para la cara no iluminada de la placa delantera, y (2') para la cara iluminada. Los balances térmicos de las placas son (llamamos \dot{Q}_{12} a los intercambios netos de radiación entre las superficies 1 y 2, aunque no sea propiamente calor):

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = \dot{W}_{\text{dis}} + \dot{Q}_{12} - \dot{Q}_{\infty} = \dot{W}_{\text{dis}} + A_1 F_{12} (M_2 - M_1) - A_1 F_{13} \varepsilon \sigma T_1^4 \tag{5}$$

$$C_2 \frac{dT_2}{dt} = \dot{Q}_s - \dot{Q}_{12} - \dot{Q}_{\infty} = \alpha EA_1 - A_1 F_{12} (M_2 - M_1) - A_2 F_{23} \varepsilon \sigma T_2^4 \tag{6}$$

El factor de vista, F_{12} , viene [tabulado](#) para placas cuadradas paralelas:

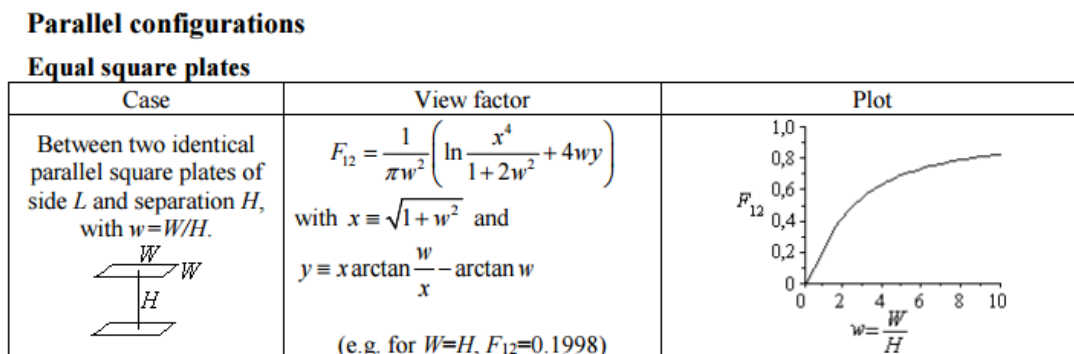


Fig. 2. Factor geométrico entre placas planas cuadradas y paralelas.

En nuestro caso es $w=W/H=0,1/0,01=10$, y el resultado es $F_{12}=0,83$, por lo que $F_{13}=1-F_{12}=0,17$. Para la otra placa sería igual, por simetría.

El ‘calor’ intercambiado entre 1 y 2 (el intercambio radiativo, más propiamente, porque podría haber $\dot{Q}_{12} \neq 0$ con $T_1=T_2$, en contra de la definición de calor, como se explica [aparte](#)), es función de las exitancias respectivas, \dot{Q}_{12}

$=A_1F_{12}(M_2-M_1)$, que son complicadas de calcular excepto en el caso límite de cuerpos negros, en que son $M=M_{bb}=\sigma T^4$; si no, dependen de sus propiedades termoópticas (conocidas) y de la irradiancia E a la que están sometidos (desconocida), $M=\varepsilon\sigma T^4+\alpha E$. Podría aproximarse la placa blanca original como cuerpo negro, pues al no estar expuesta al Sol, sólo importa la emisividad, que es casi la unidad ($\varepsilon_{blanca}=0,85$), pero es que cuando hay solo una superficie gris (como aquí), y está aislada, el intercambio de energía radiante entre 1 y 2 es el mismo que si fuese perfectamente negra porque, aunque solo emite $\varepsilon\sigma T^4$, el resto es lo que refleja de lo que le envía la superficie 1; i.e. si la 2 es negra, aunque la 1 sea blanca, por estar aislada se verifica:

$$C_1 \frac{dT_1}{dt} = \dot{W}_{dis} + A_1F_{12}\sigma(T_2^4 - T_1^4) - A_1F_{13}\sigma T_1^4 \quad (7)$$

$$C_2 \frac{dT_2}{dt} = EA_1 - A_1F_{12}\sigma(T_2^4 - T_1^4) - A_2F_{23}\sigma T_2^4 \quad (8)$$

y substituyendo valores, para el estado estacionario:

$$0 = 4,7 \cdot 10^{-10} \cdot T_2^4 - 5,67 \cdot 10^{-10} \cdot T_1^4 \quad (9)$$

$$0 = 13,6 + 4,7 \cdot 10^{-10} \cdot T_1^4 - 11,3 \cdot 10^{-10} \cdot T_2^4 \quad (10)$$

un sistema lineal en T^4 que se despeja fácilmente para dar $T_1=350,4$ K (77 °C) y $T_2=367,4$ K (94 °C), i.e. la negra, que recibe el sol, alcanza 94 °C y transmite una potencia térmica $\dot{Q}_{12}=A_1F_{12}\sigma(T_2^4-T_1^4)=1,48$ W a la placa blanca, la cual queda a 77 °C (que es más de los 50 °C permitidos).

Sol. f)

Si ambas placas son blancas, hay que recurrir al método de las exitancias (radiosidades, como se decía antes), y las ecuaciones para resolver el problema pueden establecerse de manera rutinaria mediante la analogía eléctrica, estableciendo un circuito eléctrico con nodos en las emitancias de cuerpo negro (M_{bb}) y las exitancias (M), con resistencias superficiales ($(1-\varepsilon)/(\varepsilon A)$) y resistencias geométricas ($1/(AF_{12})$), y planteando en cada nudo el balance de intensidades de corriente (flujos de energía radiante). El circuito eléctrico equivalente es el de la Fig. 3.

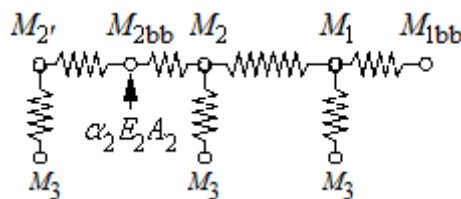


Fig. 3. Analogía eléctrica del problema de las exitancias.

Los balances de flujo en los nodos son:

- Flujo que entra en M_2' procedente de 3, igual a flujo que sale de M_2' hacia M_{2bb} :

$$\frac{M_3 - M_{2'}}{A_2 F_{2'3}} = \frac{M_{2'} - M_{2bb}}{\varepsilon_2 A_2} \quad (11)$$

- Flujos que entran en M_{2bb} procedentes de 2' y absorbido del Sol, igual a flujo que sale de M_{2bb} hacia M_2 :

$$\frac{M_{2'} - M_{2bb}}{1 - \varepsilon_2} + \alpha_2 E A_2 = \frac{M_{2bb} - M_2}{\varepsilon_2 A_2} \quad (12)$$

- Flujos que entran en M_2 procedentes de 2bb y de 3, igual a flujo que sale de M_2 hacia M_1 :

$$\frac{M_{2bb} - M_2}{\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} + \frac{M_3 - M_2}{\frac{1}{A_1 F_{13}}} = \frac{M_2 - M_1}{\frac{1}{A_1 F_{13}}} \quad (13)$$

- Flujos que entran en M_1 procedentes de 2 y de 3, igual a flujo que sale de M_1 hacia M_{1bb} :

$$\frac{M_2 - M_1}{\frac{1}{A_1 F_{12}}} + \frac{M_3 - M_1}{\frac{1}{A_1 F_{13}}} = \frac{M_{1bb} - M_1}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}} \quad (14)$$

- Flujo que entra en M_{1bb} procedente de 1, igual a cero:

$$\frac{M_1 - M_{1bb}}{\frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 A_1}} = 0 \quad (15)$$

Si eliminamos M_2 entre (11) y (12) sumando previamente ambos términos de (11) y teniendo en cuenta que $F_{2,3}=1$ y $\varepsilon_2=\varepsilon_2$, queda:

$$\varepsilon_2 A_2 (M_3 - M_{2bb}) + \alpha_2 E A_2 = \frac{M_{2bb} - M_2}{\frac{1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 A_2}} \quad (16)$$

y ya tenemos un sistema lineal de 4 ecuaciones (13-16) con 4 incógnitas (M_{2bb} , M_2 , M_1 , M_{1bb}). Resolviendo con $M_3=0$, $\alpha_2=0,20$, $\varepsilon_2=0,85$, $\varepsilon_1=0,85$, $A_1=A_2=0,01 \text{ m}^2$, $F_{12}=F_{21}=0,83$, $F_{13}=F_{23}=0,17$, y $E=1361 \text{ W/m}^2$, se obtiene $M_{2bb}=236 \text{ W/m}^2$, $M_2=224 \text{ W/m}^2$, y $M_{1bb}=M_1=185 \text{ W/m}^2$, de donde finalmente se deducen las temperaturas, $T_2=(M_{2bb}/\sigma)^{1/4}=257 \text{ K}$ ($-19 \text{ }^\circ\text{C}$), y $T_1=(M_{1bb}/\sigma)^{1/4}=239 \text{ K}$ ($-34 \text{ }^\circ\text{C}$).

[Back to Spacecraft thermal control](#)

[Back to Heat and mass transfer](#)

[Back to Thermodynamics](#)