

### Enunciado

Considérese una tarjeta electrónica (PCB) de  $100 \times 100 \times 1,5 \text{ mm}^3$  de FR-4, con recubrimientos de  $50 \text{ }\mu\text{m}$  de cobre por cada lado, que en una de las caras es continuo, y en la otra sólo ocupa el 10% de la superficie, en la cual van montados diversos componentes electrónicos que en funcionamiento normal disipan  $3 \text{ W}$  en total, y cuya capacidad térmica se estima en  $200 \text{ J/K}$ . La tarjeta va insertada en una placa base por uno de los bordes, el cual se va a considerar permanentemente a  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ , pudiendo considerarse los otros tres bordes aislados. Se pide:

- Determinar la conductividad térmica efectiva, y la distribución de temperatura en la placa suponiendo la disipación uniformemente distribuida. ¿Y sin el recubrimiento de cobre de la cara posterior?
- Estimar la diferencia de temperatura entre las dos caras de la tarjeta en el caso anterior.
- Temperatura máxima considerando que además se transmite calor por radiación, con una emisividad media de  $0,8$  por el lado de los componentes, y de  $0,3$  por la cara opuesta, con una caja electrónica que se puede suponer negra y a  $40 \text{ }^\circ\text{C}$ . ¿Qué influencia tendría añadir el efecto de la convección con aire encerrado, suponiendo un coeficiente de  $2 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ?
- Evolución espacio-temporal de la temperatura si se considera un funcionamiento periódico en el que, durante  $10$  minutos de cada  $90$  minutos, la tarjeta consume el doble de potencia.
- Repetir los apartados anteriores suponiendo ahora que los componentes que más disipan están en un área central de  $60 \times 60 \text{ mm}^2$ .

### Solución

- Determinar la conductividad térmica efectiva, y la distribución de temperatura en la placa suponiendo la disipación uniformemente distribuida. ¿Y sin el recubrimiento de cobre de la cara posterior?

La forma en planta de la PCB, ya con los detalles del último apartado, se muestra en la Fig. 1.

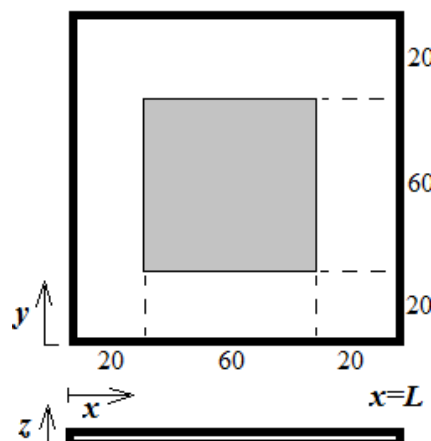


Fig. 1. Dimensiones de la PCB con el área utilizada para el último apartado (en mm).

Se van a usar los siguientes datos del [FR-4](#):  $\rho=1850 \text{ kg/m}^3$ ,  $c=700 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ ,  $k=0.50 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ) en el plano,  $k=0.25 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ) perpendicularmente, temperatura máxima de trabajo  $T_{\max}=130 \text{ }^\circ\text{C}$ .

El problema puede considerarse unidimensional porque una dimensión es muy pequeña (1,5 frente a 100), y el calor va a fluir por conducción sólo hacia el borde anclado (en las otras direcciones está aislado).

La conductividad térmica efectiva longitudinal (i.e. en el plano de la PCB) es:

$$k_{\text{eff,p}} = \sum_{\text{layers}} \frac{k_i f_i \delta_i}{\delta_{\text{PCB}}} = \frac{k_{\text{Cu}} f_{\text{Cu}} \delta_{\text{Cu}} + k_{\text{FR}} \delta_{\text{FR}} + k_{\text{Cu}} \delta_{\text{Cu}}}{\delta_{\text{PCB}}} = \frac{393 \cdot 0.1 \cdot 0.05 + 0.5 \cdot (1.5 - 0.1) + 393 \cdot 0.05}{1.5} = 15 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$$

El perfil de temperatura en la placa,  $T(x)$ , debido a una disipación uniforme, de densidad volumétrica  $\phi = \dot{W}_{\text{dis}}/V$ , se deduce de la ecuación del calor,  $\rho c \partial T / \partial t = k \partial^2 T / \partial x^2 + \phi$ , en régimen estacionario y con las condiciones de contorno apropiadas, resultando un perfil parabólico,  $T(x) = T_0 + (\phi/k)(xL - x^2/2)$ , con el máximo en  $x=L$ :  $T_{\max} = T_0 + \phi L^2 / (2k) = T_0 + \dot{W}_{\text{dis}} L_x / (2k L_x L_z) = 298 + 3 \cdot 0.1 / (2 \cdot 15 \cdot 0.1 \cdot 0.0015) = 365 \text{ K}$  ( $92 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

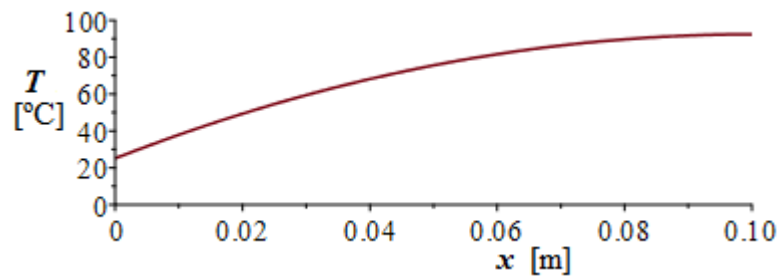


Fig. 2. Perfil de temperatura en la placa,  $T(x)$ .

Sin el recubrimiento de cobre de la cara posterior, sería  $k_{\text{eff,p}}=1,8 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ , lo que daría una  $T_{\max}=861 \text{ K}$ , que es inalcanzable porque la resina de la FR-4 se chamuscaría antes, desprendiendo gases tóxicos, y toda la placa se estropearía. Incluso el valor con el cobre,  $T_{\max}=92 \text{ }^\circ\text{C}$ , ya es muy alto, pues, aunque es inferior al valor máximo de trabajo recomendado para el FR-4 (unos  $130 \text{ }^\circ\text{C}$ ), podría dañar algún componente electrónico, que no suelen poder trabajar a  $>80 \text{ }^\circ\text{C}$ .

b) Estimar la diferencia de temperatura entre las dos caras de la tarjeta en el caso anterior.

La conductividad térmica efectiva transversal (i.e. perpendicular al plano de la PCB) es:

$$k_{\text{eff,t}} = \frac{1}{\sum_{\text{layers}} \frac{1}{k_i f_i}} = \frac{1}{\frac{1}{393 \cdot 0.1} + \frac{1}{0.25} + \frac{1}{393}} = 0.25 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$$

por lo que los 3 W de la cara de componentes podrían pasar a la otra cara con un salto  $\Delta T_t$  tal que  $\dot{W}_{\text{dis}} = k_{\text{eff,t}} A \Delta T_t / \delta_{\text{PCB}}$ , i.e.  $\Delta T_t = 3 \cdot 0.0015 / (0.25 \cdot 0.1 \cdot 0.1) = 1.8 \text{ K}$ , que puede despreciarse frente a las variaciones longitudinales (desde  $25 \text{ }^\circ\text{C}$  hasta  $92 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

- c) Temperatura máxima considerando que además se transmite calor por radiación, con una emisividad media de 0,8 por el lado de los componentes, y de 0,3 por la cara opuesta, con una caja electrónica que se puede suponer negra y a 40 °C. ¿Qué influencia tendría añadir el efecto de la convección con aire encerrado, suponiendo un coeficiente de 2 W/(m<sup>2</sup>·K)?

Para modelizar las pérdidas al ambiente (bueno, al principio son ganancias porque la PCB parte de 25 °C y el entorno se considera que ya está a 40 °C), hay que añadir unos sumideros distribuidos por toda el área de la PCB, pero que no son uniformes porque dependen de la temperatura local. Si sólo se añadiese la convección, el problema seguiría siendo lineal y con solución analítica, pero con la radiación es no lineal y hay que resolverlo numéricamente.

Resolveremos el transitorio (problema parabólico), que es más sencillo que directamente el estacionario (problema elíptico). Vamos a tener en cuenta ya la capacidad térmica de los componentes electrónicos ( $C=200$  J/K), dejando las demás dimensiones anteriores, aunque para el régimen estacionario da igual. La capacidad térmica efectiva específica,  $c_{\text{eff}}$ , se obtiene del valor global, suma de la PCB más los componentes,  $\rho_{\text{eff}}c_{\text{eff}}LL_yL_z=\sum\rho_i c_i LL_y\delta_i+C$ ; si se elige  $\rho_{\text{eff}}=\rho_{\text{FR4}}=1850$  kg/m<sup>3</sup>, resulta  $c_{\text{eff}}=7930$  J/(kg·K); nótese que este valor es mucho mayor que la media de la PCB ( $c_{\text{FR4}}=700$  J/(kg·K)) porque, manteniendo el volumen de la PCB, se le añade la  $C$  de los componentes externos.

Suponemos que los componentes electrónicos no contribuyen a la conducción de calor en la dirección paralela a la tarjeta, por estar dispersos (en los circuitos de cobre sí que hemos tenido en cuenta la continuidad).

Tomaremos un valor inicial de temperatura de la placa igual a la del encastre,  $T(x,0)=T_b=298$  K=25 °C. La ecuación del calor unidimensional discretizada para un nodo genérico 1D, con disipación  $\phi$  y pérdidas laterales convectivas ( $h$ ) y radiativas ( $\varepsilon$ ), es:

$$\rho A \Delta x c \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} = kA \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{\Delta x} - kA \frac{T_i^j - T_{i-1}^j}{\Delta x} + \phi_i^j A \Delta x - p \Delta x \left[ h(T_i^j - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T_i^{4j} - T_\infty^4) \right]$$

de donde se despeja la temperatura para las iteraciones:

$$T_i^+ = T_i + \frac{k \Delta t}{\rho c} \frac{T_{i+} - 2T_i + T_{i-}}{(\Delta x)^2} + \frac{\phi \Delta t}{\rho c} - \frac{p \Delta t}{\rho c A} \left[ h(T_i - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T_i^4 - T_\infty^4) \right]$$

Preparando un pequeño código en Matlab (Tabla 1) se obtienen los resultados mostrados en la Fig. 3.

Tabla 1. Iteraciones para simulación con Matlab.

```

j=1; T(j, :)=T0;           %Initial temperature profile T(x,t)=0 (assumed uniform)
for j=2:M                 %Time advance
    i=1; T(j, i)=T0;      %Left border (base) maintained at T0
    for i=2:N              %Generic spatial nodes
        Lapla=(T(j-1, i+1)-2*T(j-1, i)+T(j-1, i-1))/Dx^2;
    
```

```

T(j,i)=T(j-1,i)+(Dt/(rho*c))*(k*Lapla+phi-(p/A)*(h*(T(j-1,i)-Tinf)
+epsilon*sigma*(T(j-1,i)^4-Tinf^4)));
end
i=N+1; T(j,i)=T(j-1,i-1);%Right border kept adiabatic
end

```

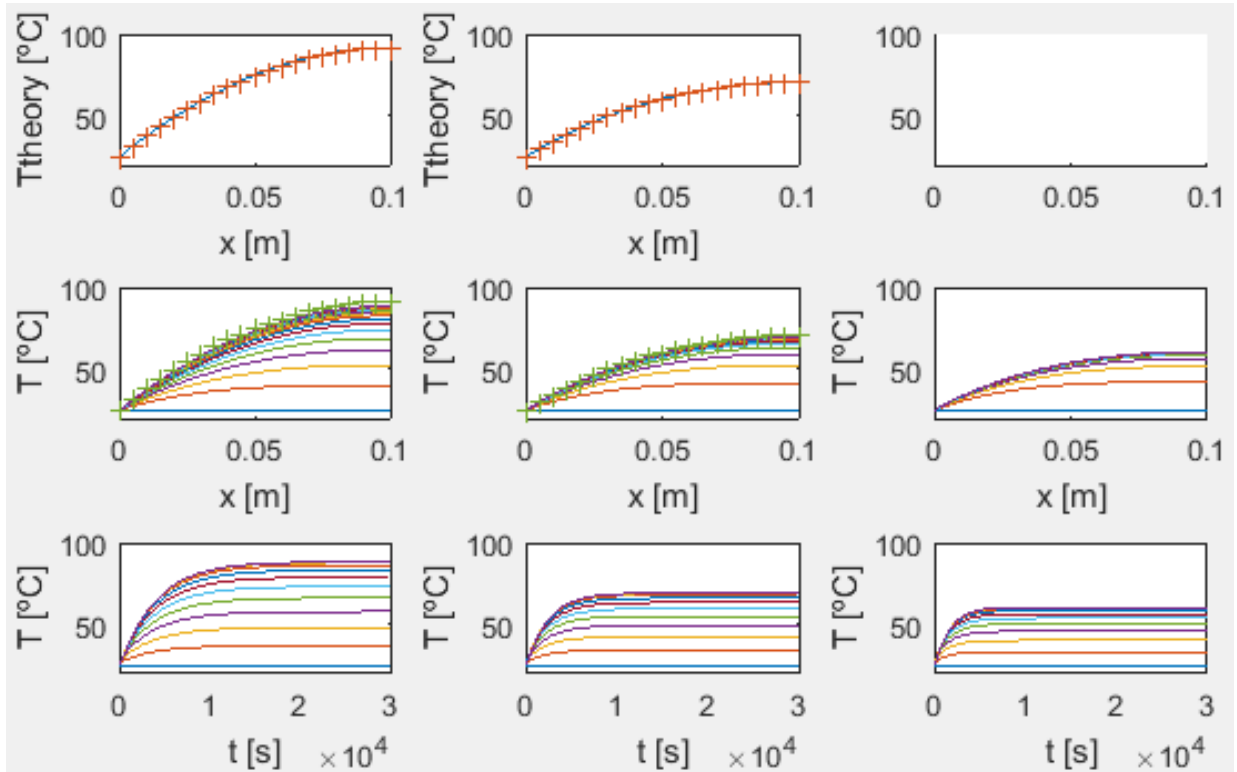


Fig. 3. Simulación del calentamiento con fuentes uniformemente distribuidas: a) caso  $h=0$  y  $\varepsilon=0$ ; b) caso  $h=2$  W/(m·K) y  $\varepsilon=0$ ; c) caso  $h=0$  y  $\varepsilon=(0,8+0,3)/2=0,55$  (en este caso no hay solución analítica).

Siempre conviene comprobar la bondad de la simulación resolviendo algún caso conocido, así que se han resuelto los tres casos que se presentan en la Fig. 3. En la Fig. 3a, el caso simple de conducción sin pérdidas, que ya se había resuelto en el apartado a), cuya solución estacionaria era:

$$T(x) = T_0 + \frac{\phi}{k} \left( xL - \frac{x^2}{2} \right)$$

ya presentada en la Fig. 2, cuyo valor máximo era  $T_{\max} = T_0 + \phi L^2 / (2k) = T_0 + \dot{W}_{\text{dis}} L_x / (2kL_xL_z) = 365$  K (92,2 °C); la simulación numérica con  $N=20$  tramos espaciales en  $0 \leq x \leq L$  ( $L=0,1$  m) y  $M=2500$  etapas temporales en  $0 \leq t \leq t_{\text{sim}}$  ( $t_{\text{sim}}=30\,000$  s) da  $T_{\max}=88,3$  °C, y con  $N=40$  da  $T_{\max}=90,0$  °C.

Como siempre, la elección de  $N$  es arbitraria (cuanto mayor, más precisión pero más tiempo de cálculo), pero la elección de  $M$  y  $t_{\text{sim}}$  no es trivial. Puede empezarse con un  $t_{\text{sim}}$  arbitrario y un  $M$  tal que las iteraciones sean convergentes, para lo cual, en este problema unidimensional ha de ser:

$$Fo \equiv \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{k\Delta t}{\rho c (\Delta x)^2} = \frac{kt_{\text{sim}} N^2}{\rho c L^2 M} < \frac{1}{2} \rightarrow M > \frac{2kt_{\text{sim}}}{\rho c L^2} N^2$$

Para elegir  $t_{sim}$  más racionalmente hay que estimar el tiempo de relajación del problema conductivo, que será del orden de  $t_r=L^2/a=\rho cL^2/k=1850\cdot 7930\cdot 0,1^2/15=9800$  s (efectivamente, en la Fig. 3a se puede apreciar que para  $t=1\cdot 10^4$  s ya casi se ha alcanzado el régimen).

Una vez comprobado que el algoritmo (Tabla 1) funciona bien en el caso conductivo puro ( $h=0$  y  $\varepsilon=0$ ), se introducen los parámetros de las pérdidas/ganancias laterales ( $h\neq 0$  o  $\varepsilon\neq 0$ ). Como resulta que el problema sigue siendo lineal con  $h\neq 0$  si  $\varepsilon=0$  (i.e. con convección pero sin radiación), también se puede comparar la simulación numérica con la solución analítica estacionaria:

$$T(x) = T_\infty + \frac{\phi}{km^2} + \left( T_0 - T_\infty - \frac{\phi}{km^2} \right) \left[ \cosh(mx) - \tanh(mL) \sinh(mx) \right] \quad m \equiv \sqrt{\frac{ph}{kA}}$$

siendo el perímetro bañado  $p=2L_y=0,2$  m, el área del flujo conductivo  $A=L_yL_z=0,15\cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup>, que con la conductividad efectiva paralela al plano  $k_{eff,p}=15$  W/(m·K) y  $h=2$  W/(m<sup>2</sup>·K), da  $m=13,3$  1/m, y un valor en el extremo  $T_{max}=70,5$  °C, mientras que la simulación con  $N=20$  da  $T_{max}=69,3$  °C (70,0 °C con  $N=40$ ).

Para el caso con pérdidas radiativas (sin solución analítica) el resultado numérico para  $h=0$  y  $\varepsilon=(0,8+0,3)/2=0,55$  (la emisividad media de las caras), es  $T_{max}=60,7$  °C para  $N=20$  (61,0 °C con  $N=40$ ). También se puede poner la combinación  $h=2$  W/(m<sup>2</sup>·K) y  $e=0,55$ , que todavía bajaría más las temperaturas, pero que no añade interés.

- d) Evolución espacio-temporal de la temperatura si se considera un funcionamiento periódico en el que, durante 10 minutos de cada 90 minutos, la tarjeta consume el doble de potencia.

Si la disipación de energía varía con el tiempo como se muestra en la Fig. 4, con periodo de  $90\cdot 60=5400$  s (80 min disipando 3 W y 10 min disipando 6 W), habrá que esperar varios periodos para que desaparezca el transitorio inicial; bueno, con el  $t_{sim}=30\ 000$  s usado antes, ya se simulan  $30000/5400=5,6$  periodos. Basta entonces introducir la condición de que entre los 80 min y los 90 min de cada 90 min se disipe el doble, i.e.  $\dot{W}_{dis}=6$  W. La fig. 5 presenta la simulación para el caso  $h=0$  y  $\varepsilon=0$ , donde se puede apreciar que no se llega al régimen estacionario en los 80 min de disipación normal (claro, ya se vio que el tiempo de relajación era de unos 9800 s=163 min). A lo que se llega es a un régimen periódico tras los primeros ciclos transitorios. Por supuesto que en los breves 10 min en los que la disipación es el doble, apenas se calienta un poco más, pero no hasta el doble. No se han dibujado los perfiles espaciales  $T(x)$  para diversos tiempos porque se montan unos sobre otros en cada ciclo de calentamiento/enfriamiento..

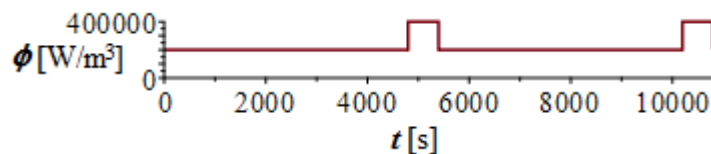


Fig. 4. Variación con el tiempo de la disipación,  $\phi(t)$ , en dos periodos de 90 min.

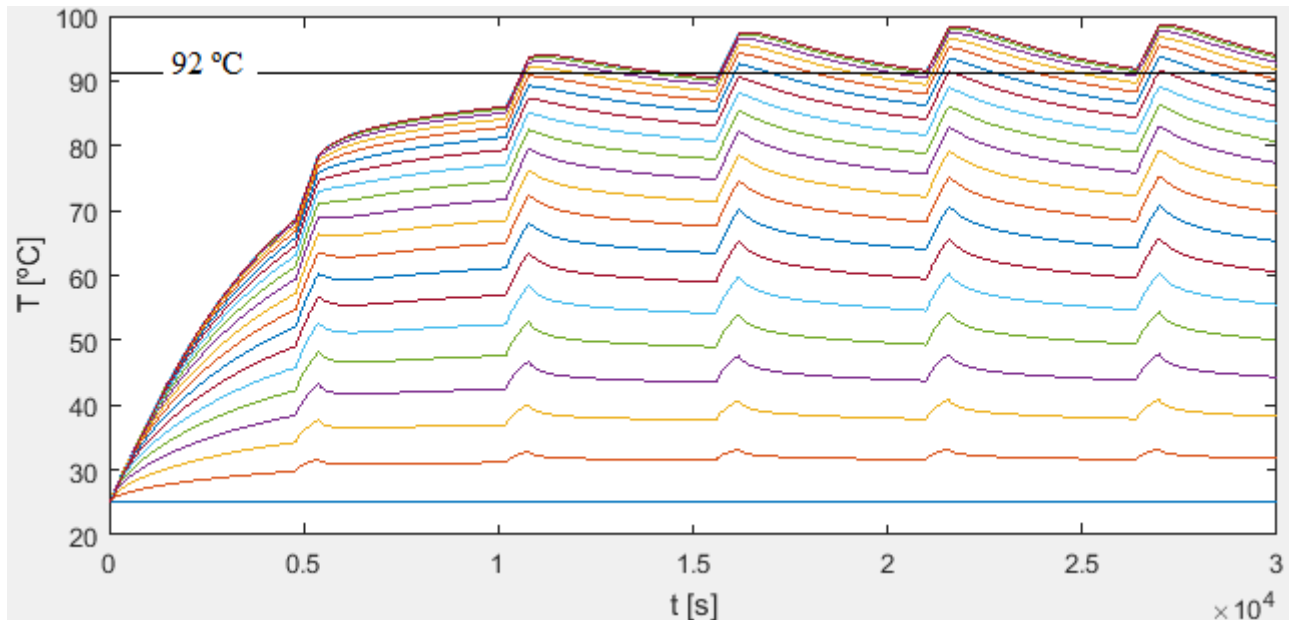


Fig. 5. Variación con el tiempo de la temperatura en cada una de los  $N+1=21$  nodos cuando la disipación,  $\phi(t)$ , varía como en la Fig. 4.

- e) Repetir los apartados anteriores suponiendo ahora que los componentes que más disipan están en un área central de  $60 \times 60 \text{ mm}^2$ .

Si se considera que los componentes que más disipan están en un área central de  $60 \times 60 \text{ mm}^2$  de la tarjeta según se mostró en la Fig. 1, todavía podría ser buena la aproximación unidimensional porque las zonas laterales no son muy extensas y están aisladas en sus bordes exteriores, lo cual se comprobaría a posteriori llevando a cabo una simulación bidimensional, con  $T(x,y,t)$ . Por otra parte, el salto de temperatura a través del espesor de la PCB sería ahora mayor en la zona disipativa, siendo proporcional al cambio de potencia superficial, i.e. pasaría de  $1,8 \text{ K}$  a  $1,8 \cdot (0,1 \cdot 0,1) / (0,06 \cdot 0,06) = 5 \text{ K}$ .

Aun con el modelo 1D, hay que distinguir entre los nodos disipativos y los que no lo son, y distribuir adecuadamente la disipación. Si suponemos concentrada toda la disipación (e.g. los  $3 \text{ W}$ ) en esa área de  $60 \cdot 60 = 3600 \text{ mm}^2$ , para el modelo 1D hay que suponer que se disipan en  $60 \cdot 100 = 6000 \text{ mm}^2$  para que no haya gradientes transversales.

Si mantenemos la distribución uniforme de la capacidad térmica (no sabemos si los elementos más disipativos tienen más o menos capacidad térmica que los menos disipativos), el problema se resuelve como en el caso anterior, pero haciendo que  $\phi$  dependa de  $x$ ,  $\phi(x)$ , y no de  $t$  como antes,  $\phi(t)$ . Nótese que si se concentra la capacidad térmica en el área disipativa, esta tendría más inercia térmica y durante los primeros instantes con radiación o convección, las zonas no disipativas se calentarían más rápidamente que las disipativas, apareciendo varias inflexiones en el perfil  $T(x)$ .

Si no hay radiación, este caso todavía admite una solución analítica a trozos para el régimen estacionario. Si tampoco hay convección, esta solución sería:

- En los primeros  $20 \text{ mm}$  sin disipación, el perfil de temperatura será plano, alcanzando una temperatura  $T_i$  en  $x=0,02 \text{ m}$  tal que  $kA(T_i - T_0)/L_{20} = \dot{W}_{\text{dis}} = 3 \text{ W}$ ., de se obtiene  $T_i$ .

- En los 60 mm centrales con disipación, el perfil será parabólico como ya se vio antes, yendo desde  $T_i$  hasta una temperatura máxima  $T_m$ , que se obtiene como antes, con  $T_{\max}=T_0+\phi L^2/(2k)$ , pero con los nuevos valores de las variables.
- En el último tramo de 20 mm, sin disipación y con extremo adiabático, la temperatura será uniforme,  $T_m$ .

En la Fig. 6 se presenta la solución numérica para este caso de disipación en los 60 mm centrales, con  $h=0$  y  $\varepsilon=0$  para comparar mejor con las simulaciones anteriores, y en la Fig. 7 se incluye el efecto de la radiación. Pueden apreciarse los detalles siguientes:

1. En la Fig. 6a se han dibujado las tres funciones de la solución analítica estacionaria, que corresponde a la recta (en rojo) que sube desde los 25 °C del encastre hasta 52 °C a los 20 mm, continúa subiendo parabólicamente hasta 92 °C en  $x=0,08$  m, y acaba siendo constante (en azul).
2. En la simulación numérica, se aprecia claramente que al principio el perfil de temperaturas tiene un máximo en el centro (que es donde está la disipación); el gradiente negativo a la derecha corresponde al calor que va recibiendo la parte con el borde adiabático.

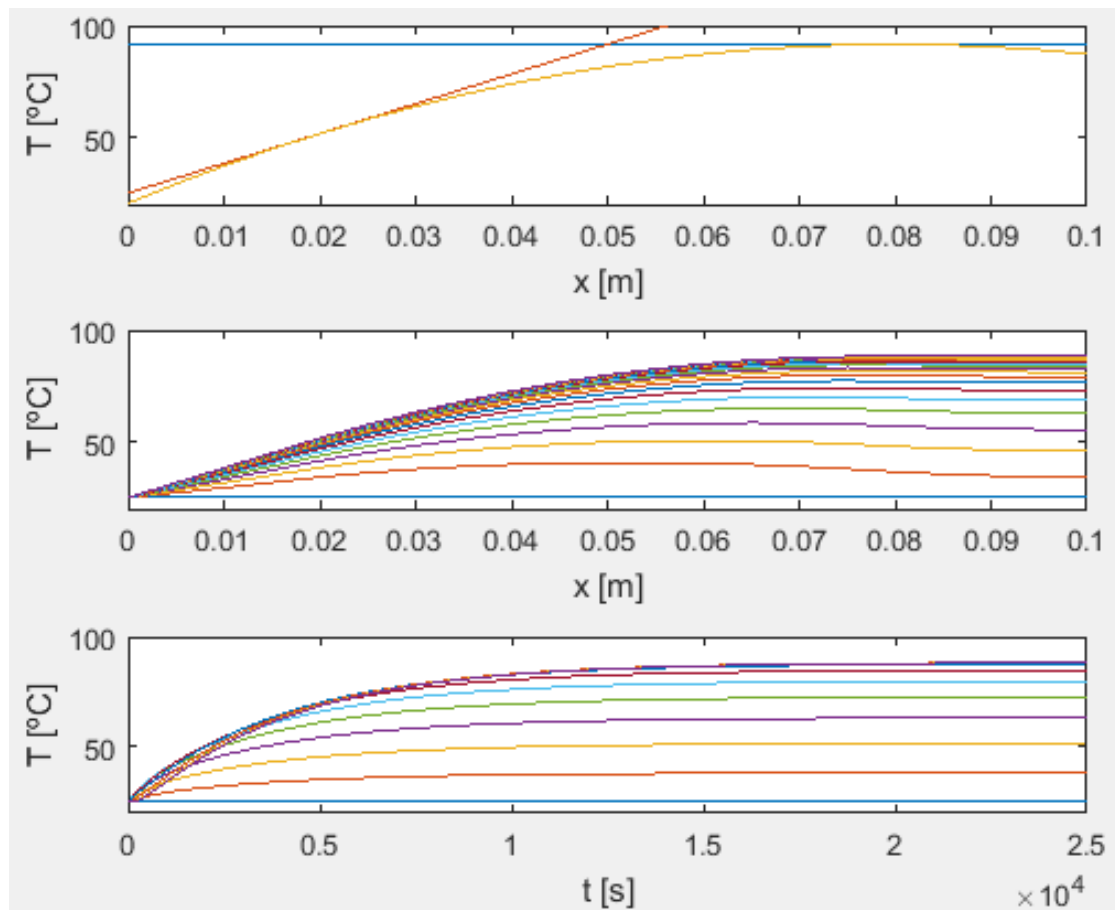


Fig. 6. Simulación del calentamiento con fuentes uniformemente distribuidas en un área central de 60·60 mm<sup>2</sup> (zona rayada en la Fig. 1) para el caso conductivo puro ( $h=0$  y  $\varepsilon=0$ ).

Cuando se incluyen los flujos laterales de calor (el radiativo en la Fig. 7), se observa que en estado estacionario el máximo de temperatura no está en el extremo aislado, pues ahora ha de fluir calor desde las fuentes hacia la zona extrema para compensar las pérdidas laterales (radiativas y conductivas) en esa zona.

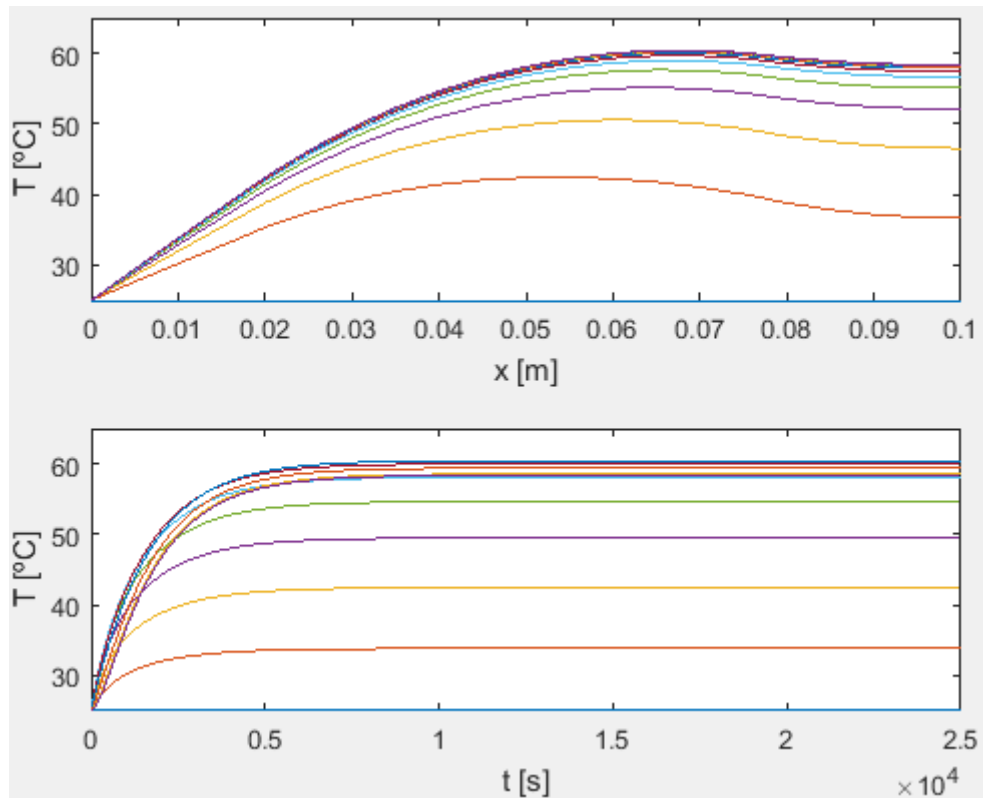


Fig. 7. Simulación del calentamiento con fuentes uniformemente distribuidas en un área central de  $60 \cdot 60 \text{ mm}^2$  (zona rayada en la Fig. 1) para el caso de conducción y radiación (con  $h=0$ ).

Resulta curioso comprobar que la temperatura máxima que se alcanza en la PCB, con este modelo 1D, no depende de la anchura del tramo disipativo, si este está centrado, lo cual es fácil de demostrar analíticamente. En el caso extremo de que los 3 W se disipasen justo en el centro (en  $x=0,05 \text{ m}$ ), la solución sólo tendría dos tramos: el recto ascendente (en rojo en la Fig. 5a), hasta  $x=0,05 \text{ m}$ , y el recto horizontal (en azul en la Fig. 5a), desde  $x=0,05 \text{ m}$  hasta  $x=0,1 \text{ m}$ .

Si se lleva a cabo la simulación bidimensional, se obtienen los resultados de la Fig. 8, donde se puede apreciar que la aproximación unidimensional es buena. En la Fig. 9 se presenta la simulación para el caso en que la disipación estuviese concentrada en los  $20 \times 20 \text{ mm}^2$  centrales en vez de en los  $60 \times 60 \text{ mm}^2$  de nuestro problema, observándose claramente que ya no sería aceptable la simplificación 1D.



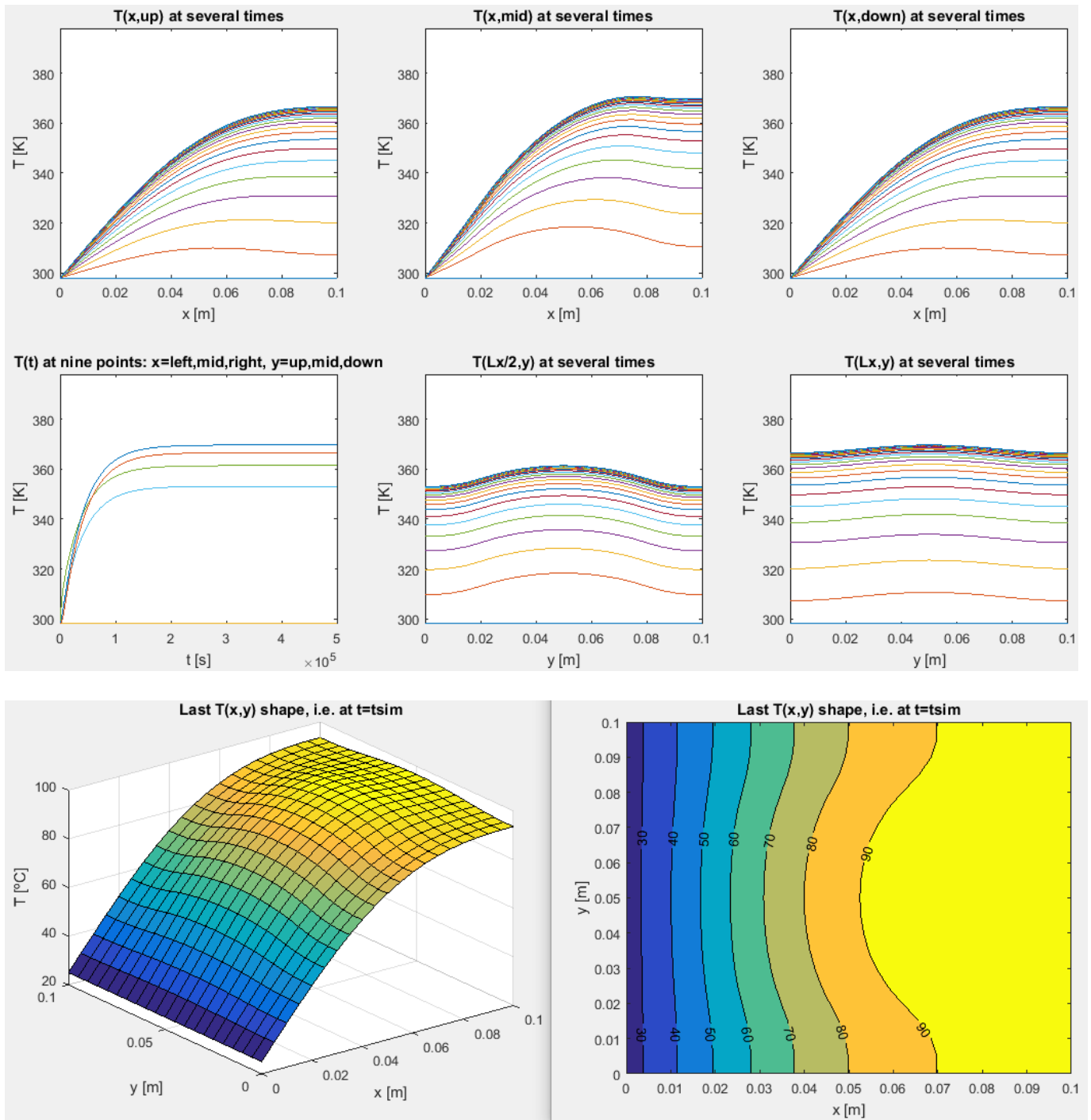


Fig. 8. Simulación 2D del problema conductivo ( $h=0$  y  $\varepsilon=0$ ) con disipación en un área de  $60 \times 60 \text{ mm}^2$  centrada en la tarjeta de  $100 \times 100 \text{ mm}^2$ . A la derecha, los contornos de temperatura (en  $^{\circ}\text{C}$ ).

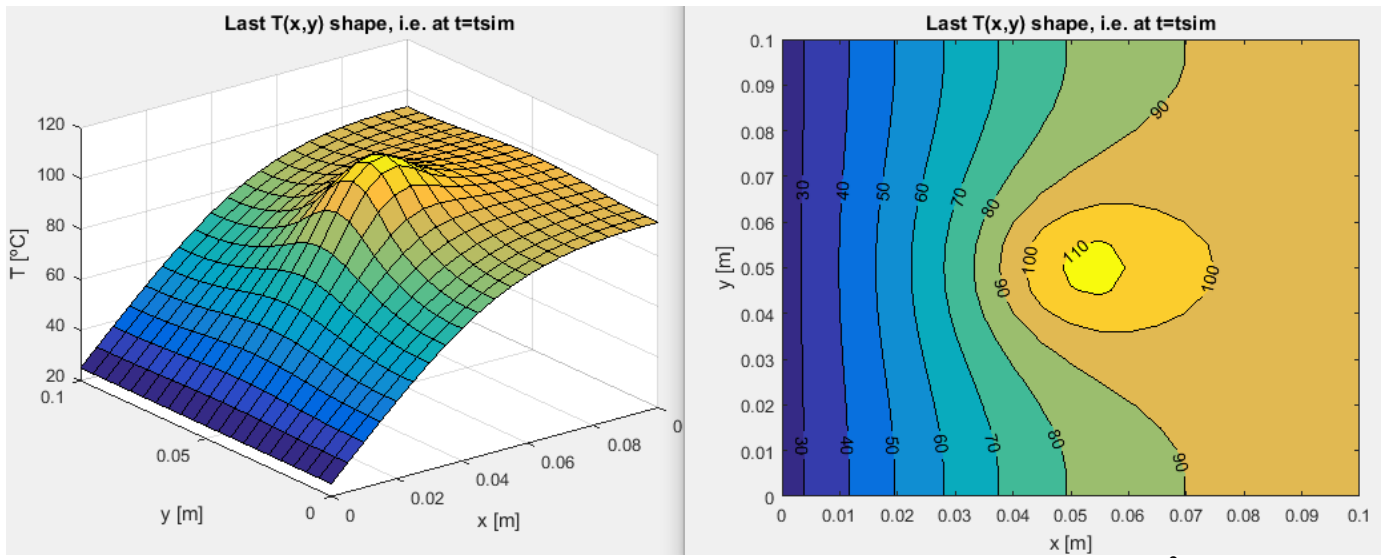


Fig. 9. Simulación 2D del problema anterior pero con disipación en un área de  $20 \times 20 \text{ mm}^2$  centrada en la tarjeta de  $100 \times 100 \text{ mm}^2$ , observándose que la aproximación 1D no sería buena.

[Back to Heat and mass transfer](#)

[Back to Thermodynamics](#)