

Statement

The thermal performance of two spacecraft walls is to be compared, one made of anodized aluminium 5 mm thick, another of CFRP and equal thickness. Both are assumed exposed to space vacuum on one side, and isolated with an MLI on the other. Take the materials properties of Table 1, suppose that in an initial state the entire wall is 300 K, and find:

- a) Steady state temperature when subjected to a solar irradiance of 1370 W/m².
- b) Temperature evolution during the transient period.
- c) The following trial is to be performed on the CFRP wall: from the same initial state (300 K) a strip of 2.5×10 cm² is illuminated with 2 W/cm² during 5 s with a lamp. Find the final thermal state neglecting losses.
- d) Temperature evolution during this new transient period (neglecting losses).
- e) Evaluate the conductive and radiative heat losses in the real transient, to see their importance.
- f) Solve the 1D heat-conduction problem along direction x perpendicular to the largest side of the sample, due to lamp irradiance, averaging temperatures across the 5 mm depth, and taking into account conductive losses.
- g) Compare the temperature evolution in the back centre of the sample, with and without conductive losses, with the following theoretical expression for an instantaneous energy deposition:

$$\theta \equiv \frac{T_{\text{back}} - T_0}{T_{\text{back,max}} - T_0} = 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \exp\left(\frac{-i^2 \pi^2 a}{L^2} t\right)$$

Table 1. Properties.

	ρ [kg/m ³]	$\alpha \cdot 10^6$ [1/K]	c [J/(kg·K)]	k [W/(m·K)]	α	ε
CFRP	1500	1 paral. 40 perp.	1200	25 paral. 1.5 perp.	0.9	0.9
Al-7075	2800	23	960	120	0.2	0.6

🇪🇸 Se quiere comparar el comportamiento térmico de una pared de aluminio anodizado de 5 mm de espesor, con otra de igual espesor de CFRP. Ambas se van a suponer expuestas al vacío espacial por una cara, y aisladas con una manta térmica multicapa por la otra. Supóngase que en un estado inicial toda la pared está a 300 K, y tómnense las propiedades de los materiales de la Tabla 1. Se pide:

- a) Temperaturas en estado estacionario cuando la pared recibe una radiación solar de 1370 W/m².
- b) Evolución de las temperaturas durante el transitorio.
- c) Para la pared de CFRP se piensa realizar el ensayo siguiente. Partiendo del mismo estado inicial (300 K), se va a irradiar una franja de 2,5×10 cm² de pared durante 5 segundos con una lámpara que da 2 W/cm², Determinar el estado térmico que se alcanzaría si no hubiese pérdidas.
- d) Evolución de las temperaturas durante el transitorio anterior (sin pérdidas).
- e) Evaluar las pérdidas por conducción y radiación, para ver cuáles son mayores.

- f) Resolver el problema unidimensional de la conducción en el CFRP a lo largo de la dirección x (i.e. perpendicular al lado mayor de la muestra), promediando las temperaturas en el espesor de 5 mm, correspondiente al calentamiento con la lámpara y teniendo en cuenta las pérdidas conductivas.
- g) Comparar la evolución temporal de la temperatura en el centro de la parte de atrás de la muestra, con y sin pérdidas por conducción, con el resultado teórico para una irradiación instantánea sin pérdidas:

$$\theta \equiv \frac{T_{\text{back}} - T_0}{T_{\text{back,max}} - T_0} = 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \exp\left(\frac{-i^2 \pi^2 a}{L^2} t\right)$$

Tabla 1. Propiedades.

	ρ [kg/m ³]	$\alpha \cdot 10^6$ [1/K]	c [J/(kg·K)]	k [W/(m·K)]	α	ε
CFRP	1500	1 paral. 40 perp.	1200	25 paral. 1.5 perp.	0.9	0.9
Al-7075	2800	23	960	120	0.2	0.6

Solución

Sol. a) Temperaturas en estado estacionario cuando la pared recibe una radiación solar de 1370 W/m².

Se trata de un caso plano estacionario con flujos de calor prescritos en ambos lados de los 5 mm de espesor de pared: en $z=0$ flujo nulo por estar aislado con una MLI, y en $z=L_z=5$ mm una exposición al Sol con $E_0=1370$ W/m², y al espacio de fondo (a $T_\infty=2,7$ K).

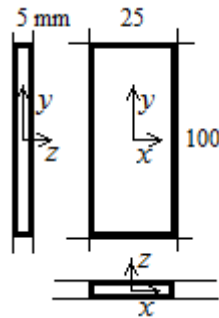


Fig. 1. Tres vistas de la pared en la zona iluminada, con notación y dimensiones (en mm).

El resultado será una temperatura uniforme, $T(z)=T_1$, cuyo valor se obtiene del balance energético:

$$mc \frac{dT}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} \rightarrow 0 = \dot{Q}_\infty + \dot{W}_{\text{dis}} \rightarrow 0 = \varepsilon A \sigma (T_\infty^4 - T_1^4) + \alpha A E_0$$

$$\rightarrow T_1 = \left(T_\infty^4 + \frac{\alpha E_0}{\varepsilon \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(2,7^4 + \frac{0,9 \cdot 1370}{0,9 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8}} \right)^{\frac{1}{4}} = 394 \text{ K} \quad (1)$$

donde se han sustituido los valores de α y ε para el CFRP; i.e. al cabo de un tiempo suficiente, la pared, que estaba a 300 K, pasará a 394 K (121 °C). Si se sustituyen los valores del aluminio, resulta que la temperatura no varía apreciablemente (de $T_0=300$ K a $T_1=299,6$ K). Si no interesase que la pared de CFRP se calentara tanto, se podría pintar de blanco para bajar su absorptancia.

Sol. b)

Para el transitorio anterior (desde $T_0=300$ K a $T_1=394$ K para el caso de CFRP) conviene estimar los tiempos de relajación radiativo y conductivo para ver si este último se puede despreciar y basta estudiar la evolución $T(t)$ y

no $T(x,t)$, i.e. si puede suponerse el perfil $T(x)$ es casi plano en cada instante. El tiempo de relajación radiativo será el necesario para calentar toda la pared con esa irradiancia; si despreciamos las pérdidas: $\Delta t_{\text{rad}} = mc(T_1 - T_0) / \dot{Q} = \rho L_z c (T_1 - T_0) / (\alpha E) = 1500 \cdot 0,005 \cdot 1200 \cdot (394 - 300) / (0,9 \cdot 1370) = 690$ s; con las pérdidas, este tiempo sería mucho mayor; de hecho, una mejor aproximación sería usar el \dot{Q}_{neto} inicial, $\dot{Q}_{\text{neto}} = \dot{Q}_s - \dot{Q}_\infty = \alpha A E_0 - \varepsilon A \sigma T_0^4 = (0,9 \cdot 1370 - 0,9 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 300^4) \cdot A = (1233 - 413) \cdot A = 820 \cdot A$, que es solo del 67 % del solar, y da un $\Delta t_{\text{rad}} = 690 / 0,67 = 1030$ s. El tiempo de relajación conductivo será $\Delta t_{\text{cond}} = L_z^2 / a = \rho c L_z^2 / k = 1500 \cdot 1200 \cdot 0,005^2 / 1,5 = 30$ s, luego, efectivamente, podemos suponer perfil espacial plano y resolver:

$$mc \frac{dT}{dt} = \varepsilon A \sigma (T_\infty^4 - T^4) + \alpha A E_0 \rightarrow \frac{\rho L_z c dT}{\varepsilon \sigma (T_\infty^4 - T^4) + \alpha E_0} = dt \quad (2)$$

que es integrable analíticamente para dar (despreciamos T_∞ por sencillez):

$$\frac{\rho L_z c T_1}{4 \alpha E_0} \left[\left(\ln \frac{T_1 + T}{T_1 - T} + 2 \arctan \frac{T}{T_1} \right) - \left(\ln \frac{T_1 + T_0}{T_1 - T_0} + 2 \arctan \frac{T_0}{T_1} \right) \right] = t \quad (3)$$

aunque suele resolverse numéricamente (con un Runge-Kutta, o simplemente por el método de Euler). La solución es:

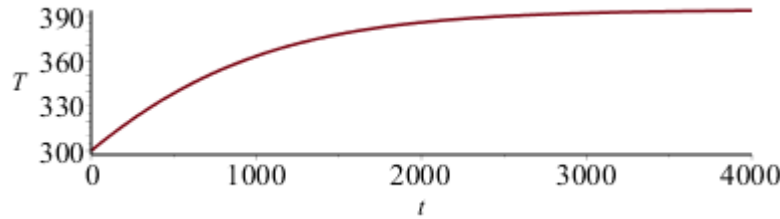


Fig. 1. Evolución del CFRP desde el estado inicial ($T_0=300$ K en $t=0$) hasta el estacionario ($T_1=394$ K); t [s].

Sol. c) Para la pared de CFRP se piensa realizar el ensayo siguiente. Partiendo del mismo estado inicial (300 K), se va a irradiar una franja de $2,5 \times 10$ cm² de pared durante 5 segundos con una lámpara que da 2 W/cm², Determinar el estado térmico que se alcanzaría si no hubiese pérdidas.

Si no hay pérdidas, y la pared recibe 2 W/cm² ($E_1=20$ kW/m²) durante 5 s, al final, tras uniformizarse la temperatura, la pared quedaría a $T(z)=cte=T_2$ tal que:

$$mc(T_2 - T_0) = \int \dot{Q} dt \rightarrow T_2 = T_0 + \frac{\alpha E_1 \Delta t}{\rho L_z c} = 300 + \frac{0,9 \cdot 20000 \cdot 5}{1500 \cdot 0,005 \cdot 1200} = 310 \text{ K} \quad (4)$$

Sol. d) Evolución de las temperaturas durante el transitorio anterior (sin pérdidas).

El transitorio durará más de los 5 s de irradiación, pues habíamos visto que el tiempo de relajación por conducción era $\Delta t_{\text{cond}} = L_z^2 / a = \rho c L_z^2 / k = 1500 \cdot 1200 \cdot 0,005^2 / 1,5 = 30$ s. Para encontrar la $T(z,t)$ tenemos que resolver la ecuación del calor unidimensional (en la dirección z) con flujos de calor prescritos en los extremos, adiabático en $z=0$ y absorción radiativa unitaria αE_1 durante los 5 s de la lámpara (y 0 después), y condiciones iniciales $T(z,0) = T_0 = 300$ K. Usamos el método de las diferencias finitas para la simulación numérica:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad \rightarrow \quad \rho c \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} = k \frac{T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j}{(\Delta z)^2} \quad j=1..M \quad i=2..N$$

$$\text{IC } T(z, 0) = T_0 \quad \rightarrow \quad T_i^1 = T_0 \quad i=1..N+1 \quad (5)$$

$$\text{BC } \begin{cases} k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 & \rightarrow k \frac{T_1^{j+1} - T_2^j}{\Delta z} = 0 \\ k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = \alpha E_1(t) & \rightarrow k \frac{T_{N+1}^{j+1} - T_N^j}{\Delta z} = \begin{cases} \alpha E_1 & \text{si } j \leq 1 + t_5 / \Delta t \\ 0 & \text{si } j > 1 + t_5 / \Delta t \end{cases} \end{cases}$$

Si tomamos un tiempo total de simulación de 15 s (5 s de irradiación más 10 s de atemperamiento), una discretización espacial de $N=25$ tramos (26 nodos: $i=1, 2..N, N+1$, de tamaño $\Delta z=L_z/N=5/25$ mm), y una discretización temporal con $\Delta t=0,02$ s para que el método explícito sea estable ($Fo=\alpha\Delta t/(\Delta z)^2=0,42 < 1/2$), se obtiene el resultado de la Fig. 2, donde se ha representado también el término forzador $E_1(t)$.

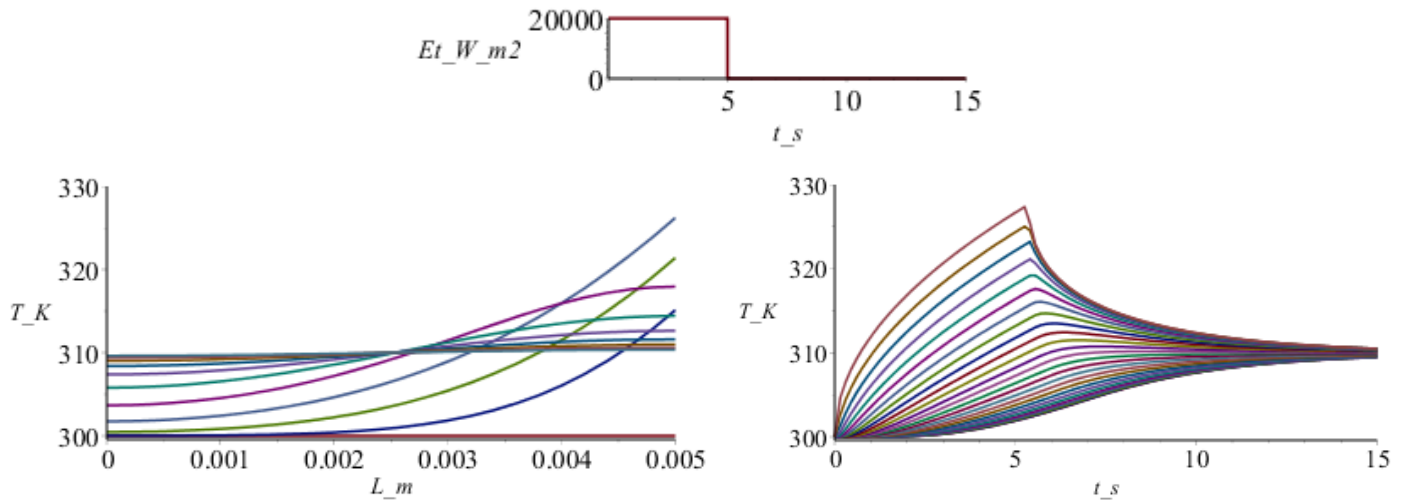


Fig. 2. Transitorio térmico en el espesor de CFRP, desde el estado inicial ($T_0=300$ K en $t=0$) hasta el estacionario sin pérdidas ($T_2=310$ K). a) Escalón de irradiación, $E_1(t)$. b) Perfiles espaciales, $T(z)$, para tiempos crecientes (hacia arriba; el primer perfil tras el inicial de $T=300$ K es para $t=1,5$ s). c) Perfiles temporales, $T(t)$, para los $N+1=26$ nodos (el que alcanza mayor temperatura es obviamente el extremo irradiado, $i=N+1$).

Sol. e) Evaluar las pérdidas por conducción y radiación, para ver cuáles son mayores.

Para evaluar las pérdidas por conducción y radiación, calcularemos sus valores máximos. Para las pérdidas por radiación al vacío de fondo, con $T_\infty=2,7$ K, tendremos:

$$\dot{Q}_{\text{rad-loss}} \approx \varepsilon A \sigma (T_{\text{max}}^4 - T_\infty^4) \approx \varepsilon L_x L_y \sigma T_{\text{max}}^4 = 0,9 \cdot 0,025 \cdot 0,100 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 310^4 = 1,2 \text{ W} \quad (6)$$

i.e. del orden de 1 W (no se ha tenido en cuenta la radiación solar porque se piden las "pérdidas radiativas", no las ganancias, aunque no cambiaría mucho: la radiación solar aportaría $\alpha E_0 L_x L_y = 3,1$ W más de los $\alpha E_1 L_x L_y = 45$ W de irradiación).

Para evaluar las pérdidas por conducción a través del contorno que separa la zona irradiada de la no-irradiada, de área de paso $A_{\text{cond}}=2L_z L_x + 2L_z L_y = 12,5$ cm², hay que estimar un gradiente térmico promedio, que tomando

$\Delta T = T_{\max} - T_0 = 310 - 300 = 10$ K equivale a estimar una distancia típica, que tomaremos como el menor de los lados $L_x = 25$ mm, por lo que tendremos:

$$\dot{Q}_{\text{cond-loss}} \approx kA \frac{\Delta T}{L} \approx k_{\text{paral}} A_{\text{cond}} \frac{T_{\max} - T_0}{L_x} = 25 \cdot 0,00125 \frac{310 - 300}{0,025} = 12 \text{ W} \quad (7)$$

i.e. se perderían del orden de 10 W por conducción al resto de la pared de CFRP, un orden de magnitud mayor que las pérdidas radiativas al espacio.

Sol. f) Resolver el problema unidimensional de la conducción en el CFRP a lo largo de la dirección x (i.e. perpendicular al lado mayor de la muestra), promediando las temperaturas en el espesor de 5 mm, correspondiente al calentamiento con la lámpara y teniendo en cuenta las pérdidas conductivas.

Si para resolver la conducción de calor a lo largo de la dirección x , promediamos las temperaturas en el espesor de $L_z = 5$ mm (con lo que la irradiación es equivalente a una disipación volumétrica uniforme), y despreciamos las variaciones en la dirección y (por ser $L_y \gg L_x$), el problema queda unidimensional y puede resolverse casi con el mismo algoritmo antes usado en (5). Con el eje x centrado para aprovechar la simetría, las condiciones de contorno serán de adiabaticidad en $x=0$ y de temperatura fija suficientemente lejos, $T(L_\infty, t) = T_0$; o mejor un flujo nulo de calor suficientemente lejos, que es menos exigente; esto es:

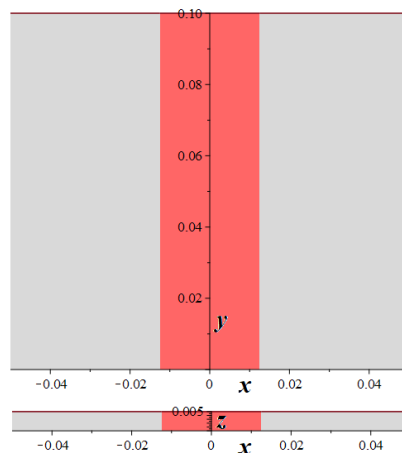
$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \phi \quad \rightarrow \quad \rho c \frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\Delta t} = k \frac{T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j}{(\Delta x)^2} + \frac{\alpha E_1 f}{L_z} \quad j = 1..M \quad i = 2..N$$

con $f = 1$ si $i \leq 1 + L_x / (2\Delta x)$ & $j \leq 1 + t_5 / \Delta t$, y $f = 0$ si no

$$\text{IC } T(x, 0) = T_0 \quad \rightarrow \quad T_i^1 = T_0 \quad i = 1..N + 1 \quad (8)$$

$$\text{BC } \begin{cases} k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 & \rightarrow k \frac{T_1^{j+1} - T_2^j}{\Delta t} = 0 \\ k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L_\infty} = 0 & \rightarrow k \frac{T_{N+1}^{j+1} - T_N^j}{\Delta t} = 0 \end{cases}$$

Tomaremos un tiempo total de simulación de 50 s (5 s de irradiación más 45 s de atemperamiento), una distancia ‘infinita’ $L_\infty = 4L_x / 2 = 50$ mm una discretización espacial de $N = 25$ tramos (26 nodos: $i = 1, 2..N, N+1$, de tamaño $\Delta z = L_\infty / N = 50 / 25 = 2$ mm), y una discretización temporal con $\Delta t = 0,1$ s para que el método explícito sea estable ($Fo = a\Delta t / (\Delta z)^2 = 0,35 < 1/2$). El resultado obtenido se presenta en la Fig. 3, donde se muestran también las proyecciones espacial y temporal del término forzador $E_1(x, t)$, que vale 20 kW/m^2 para $t < 5$ s y a la vez $x < 12,5$ mm, y es nulo fuera de ese dominio.



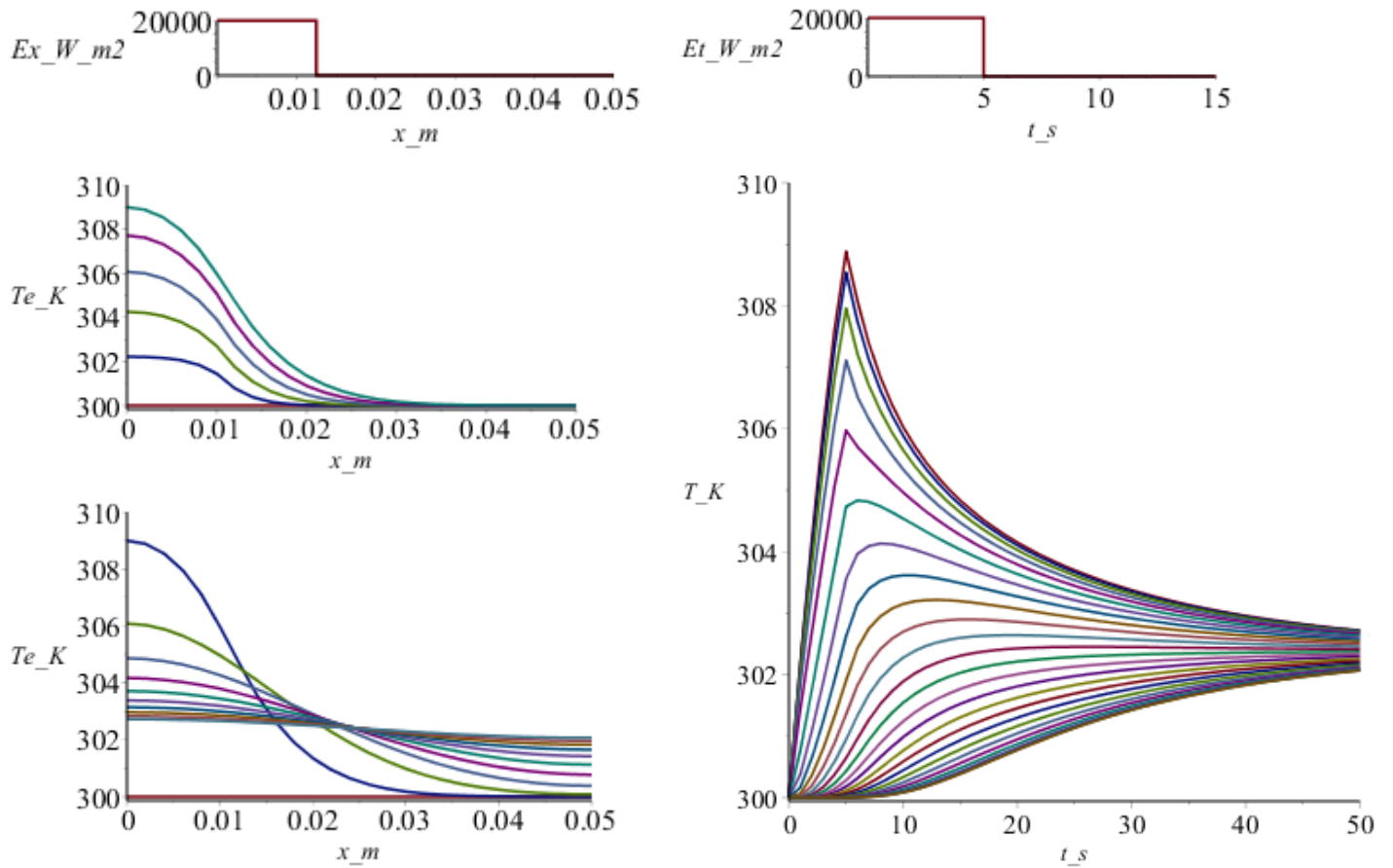


Fig. 3. Transitorio térmico cuando se irradia con $E_1=20$ kW/m² una banda de $L_x/2=12,5$ mm durante 5 s, considerando temperatura uniforme en el espesor de CFRP, y sin pérdidas, i.e. desde el estado inicial ($T_0=300$ K en $t=0$) hasta el estacionario sin pérdidas, que será con $T_3=302,5$ K (este calentamiento global de 2,5 K es la cuarta parte del anterior, $310-300=10$ K, porque la absorción total, $\int \dot{Q} dt = \int \alpha E_1 L_x L_y dt = 0,9 \cdot 20000 \cdot 0,025 \cdot 0,100 \cdot 5 = 225$ J, ahora se reparten sobre un volumen $L_\infty L_y L_z$ que es 4 veces mayor que el irradiado, $L_\infty L_y L_z = 4 L_x L_y L_z$). a) A la izquierda, perfiles espaciales, $T(x)$, para tiempos crecientes (se han separado los perfiles durante el calentamiento, $t < 5$ s, y durante el enfriamiento, $t > 5$ s). c) A la derecha, perfiles temporales, $T(t)$, para los $N+1=26$ nodos (el que alcanza mayor temperatura es el centro de la banda irradiada, $i=1$, y el que menos se calienta es el del extremo en $L_\infty=0,05$ m).

Conviene indicar que el promediar en el espesor ($L_z=5$ mm) equivale a suponer que el tiempo de relajación por conducción a través de la pared, $\Delta t_{\text{cond},z} = L_z^2/a = \rho c L_z^2/k = 1500 \cdot 1200 \cdot 0,005^2/1,5 = 30$ s es mucho menor que el tiempo de relajación por conducción lateral, $\Delta t_{\text{cond},x} = L_\infty^2/a = \rho c L_\infty^2/k = 1500 \cdot 1200 \cdot 0,050^2/25 = 180$ s.

Sol. g) Comparar la evolución temporal de la temperatura en el centro de la parte de atrás de la muestra, con y sin pérdidas por conducción, con el resultado teórico para una irradiación instantánea sin pérdidas:

$$\theta \equiv \frac{T_{\text{back}} - T_0}{T_{\text{back,max}} - T_0} = 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \exp\left(\frac{-i^2 \pi^2 a}{L^2} t\right) \quad (9)$$

Si se representa esta función $\theta(t/t_c)$, con $t_c \equiv L^2/(\pi^2 a)$, se observa que basta tomar 4 términos para que alcance se estabilice (excepto cerca del origen, donde la función no está definida, pues para $t=0$ vale alternativamente -1 o $+1$ según i).

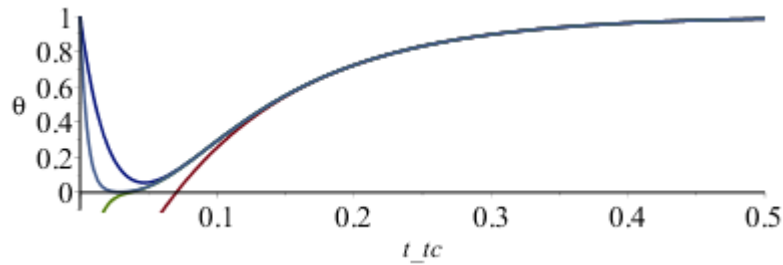


Fig. 4. Representación de la función dada, tomando $N=1, 2, 3,$ y 4 términos del desarrollo.

Si se representa esta función $\theta(t/t_c)$, con $t_c \equiv L^2/(\pi^2 a)$, se observa que basta tomar 4 términos para que alcance se estabilice (excepto cerca del origen, donde la función (9) no está definida; para $t=0$ vale alternativamente -1 o $+1$ según i).

Si comparamos directamente (Fig. 5) las dos soluciones disponibles para la temperatura en la cara trasera de la pared, $T_{back}(t)$:

- SA. Solución analítica, (9), con $T_{back-max}=310$ K, $a=k/(\rho c)=1,5/(1500 \cdot 1200)=0,83 \cdot 10^{-6}$ m²/s y $L_z=5$ mm.
- SN. Solución numérica sin pérdidas obtenida en el apartado d), i.e. curva de menor temperatura en la Fig. 2c.

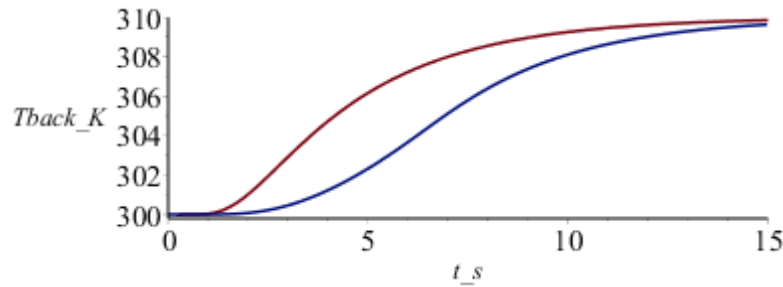


Fig. 5. Comparación no corregida de la solución analítica (SA, en rojo) y la numérica (SN, en azul).

Vemos que no hay concordancia; parece que existe una diferencia en el origen de tiempos, lo cual es atribuible a que el modelo teórico es válido para deposición instantánea de energía, mientras que en la simulación la deposición dura $\Delta t_1=5$ s. Si ajustamos el origen de tiempos teórico al punto medio del periodo de irradiación (i.e. desplazando la curva roja de la Fig. 5 $\Delta t_1/2=2,5$ s hacia la derecha, Fig. 6), la concordancia es mucho mejor:

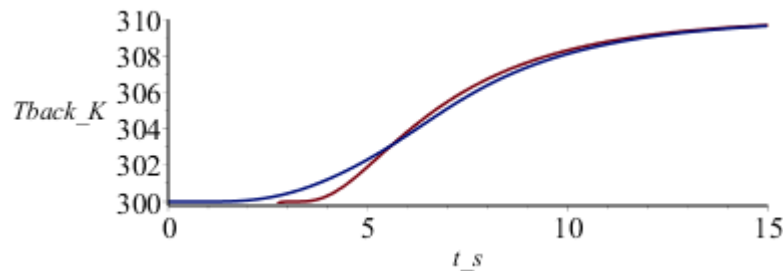


Fig. 6. Comparación ya corregida de la solución analítica (SA, en rojo) y la numérica (SN, en azul).

aunque las pendientes todavía difieren apreciablemente:

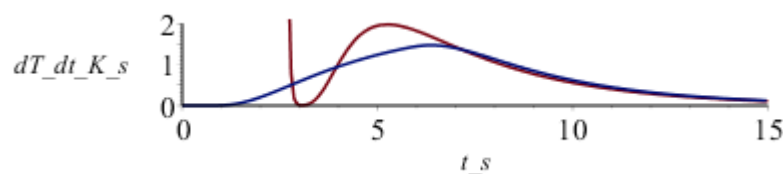


Fig. 7. Pendiente, dT/dt , de la solución analítica (SA, en rojo) y la numérica corregida (SN, en azul).

pese a que solo hay que considerar la gráfica a partir de unos $t=4$ s porque para $t<4$ s habría que tomar muchos más términos en el desarrollo teórico.

Para determinar la solución con pérdidas habría que resolver el problema bidimensional, $T(x,z,t)$ (y si no se desprecian las pérdidas en la otra dirección, incluso el problema tridimensional, $T(y,x,z,t)$), pero una aproximación sencilla sería modelizar las pérdidas laterales conductivas ya calculadas en el apartado f). Si usamos un modelo lineal con pérdidas proporcionales al tiempo transcurrido, $\Delta T_{\text{loss}}=ct$, con un coeficiente empírico $c=0,5$ para ajustar las pérdidas al final del periodo de irradiación, tenemos:

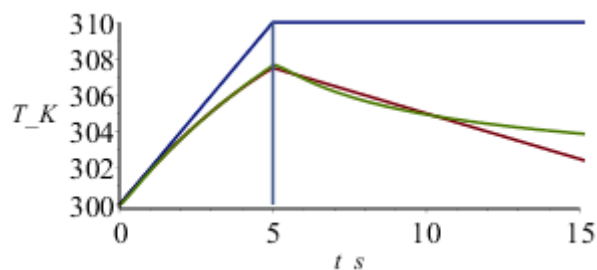


Fig. 8. Comparación de la evolución de la temperatura en el nodo central de la zona irradiada (promediando en el espesor, apartado f), para los tres casos siguientes: a) sin pérdidas laterales (línea azul, correspondiente al calentamiento a 2 K/s durante los 5 s de exposición), b) con pérdidas laterales (línea verde, coincide con la curva superior de la Fig. 3 abajo-derecha), y c) ajuste lineal con el tiempo de las pérdidas (línea roja, que aproxima a la verde).

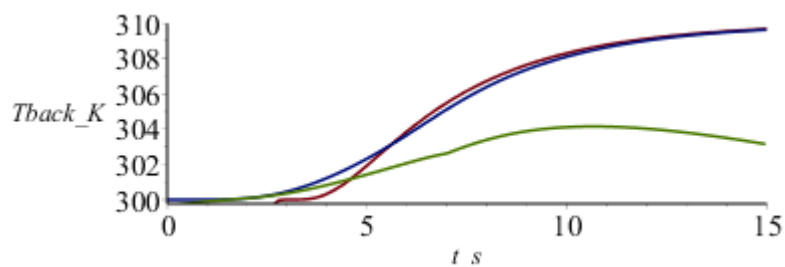


Fig. 9. Comparación ya corregida de la solución analítica (en rojo), la numérica sin pérdidas (en azul), y la numérica con pérdidas (en verde).

Conclusión: las pérdidas por conducción lateral en la banda iluminada (de 25×5 mm²) son demasiado grandes para que el modelo teórico se ajuste al comportamiento real, e incluso si se aislara lateralmente la banda, el ajuste no es perfecto por la duración finita de la irradiación (aunque puede verse que si esta durase menos, el ajuste sería perfecto, como puede comprobarse cambiando los valores de $\Delta t_1=5$ s y $E_1=2$ kW/m², por los nuevos $\Delta t_1=2$ s y $E_1=5$ kW/m², para mantener la misma deposición global. Estos nuevos resultados se muestran en la Fig. 10.

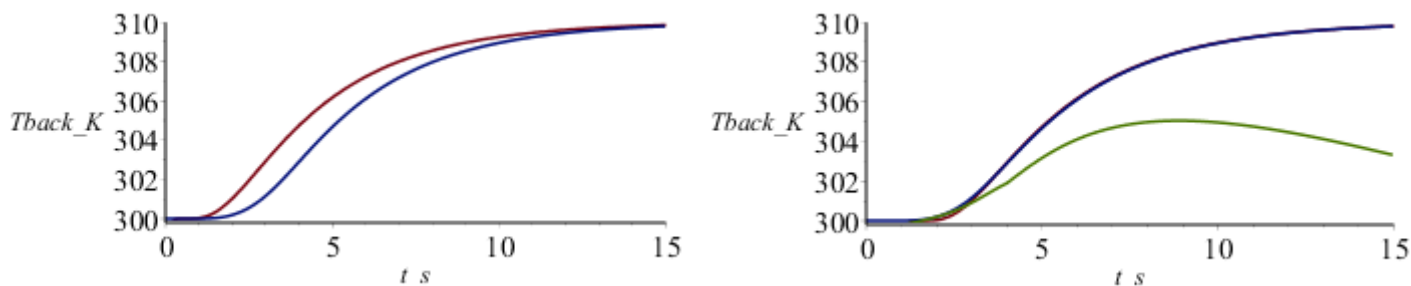


Fig. 10. Comparación de los resultados que se obtendrían si la irradiación hubiese durado solo 2 s (pero con 5 W/cm² para mantener la absorción global en los mismos 225 J). a) La solución analítica (SA, en rojo) y la numérica (SN, en azul) sin corregir. b) Incluyendo la solución numérica con pérdidas laterales, y con la corrección de la base de tiempos (desplazando 1 s hacia la derecha la solución analítica). La SA y la SN prácticamente coinciden.

[Back to Heat and mass transfer](#)

[Back to Thermodynamics](#)