

Capítulo 11

Difusión térmica y másica

Mecanismos de transmisión de la energía térmica

En este capítulo y en el siguiente, aunque están principalmente dedicados al estudio de la transmisión de calor por conducción y por convección, respectivamente, se incluye al final un análisis de los procesos, matemáticamente similares, de transferencia de masa por difusión y por convección, respectivamente.

Todo el estudio de la transmisión de calor corresponde a la Termodinámica de la evolución y no a la Termodinámica del equilibrio, pues el interés se centra aquí no ya en cuánto calor se transmite, sino en determinar a qué velocidad fluye éste.

Se llama calor a la energía no mecánica (ni eléctrica) que pasa a través de la frontera de un sistema cerrado (superficie de control impermeable a la materia). Requiere un gradiente de temperatura, genera entropía y se calcula con $Q = \Delta E - W$ (siendo ΔE la variación de energía del sistema y W el trabajo recibido por el sistema en la frontera), como se detalla en el Cap. 1. Lo que se va a estudiar aquí no es el calor intercambiado entre dos estados sino el flujo temporal de calor por unidad de área de paso $\vec{q} \equiv \vec{n} dQ / (dt dA)$, siendo \vec{n} el vector unitario normal.

No debe confundirse el calor con la energía interna térmica, que es función de estado y corresponde a la parte de la energía interna proporcional a la temperatura del cuerpo de que se trate, haya o no transmisión de energía térmica (calor) o mecánica (trabajo) con el exterior, que son funciones de proceso. La energía térmica está ligada al estado de agitación microscópico. Pese a su carácter intuitivo, a veces surgen dificultades (p.e., ¿es energía térmica la energía latente de cambio de estado?), así que conviene trabajar siempre con energías totales, que se evalúan unívocamente con $\Delta E = W_{adiab}$, y no separar en energía térmica, latente, elástica, química, eléctrica, radiante, nuclear, etc.

La transmisión de calor es el flujo de energía térmica y siempre va asociado a una diferencia de temperaturas. Tradicionalmente se acostumbra a distinguir tres fenómenos básicos para la transmisión de calor: conducción, convección y radiación térmica.

Conducción de energía térmica por gradiente de temperatura. Es una interacción electromagnética de corto alcance (del orden del tamaño molecular) debida al movimiento aleatorio atomicomolecular. En los sólidos puede decirse que es debida al movimiento aleatorio de unas partículas inmatereales (fonones, y en los metales también a los electrones) que viajan a la velocidad del sonido en los sólidos ($\approx 10^3$ m/s, aunque para los electrones es

distinto y $\approx 10^6$ m/s) en ondas longitudinales de frecuencia $\approx 10^{13}$ Hz; en los gases y líquidos es debido al movimiento aleatorio de las propias moléculas a velocidades del orden de la del sonido ($\approx 10^2$ m/s) y con un camino libre medio de $\approx 10^{-7}$ m para gases y de $\approx 10^{-9}$ m para líquidos, por lo que en cualquier caso resulta un proceso relativamente lento. La ecuación constitutiva de la evolución es la ley de Fourier (1822): $\vec{q} = -k\nabla T$, llamándose a k conductividad térmica, que es una magnitud escalar si el medio es isotrópico (en cuyo caso el vector \vec{q} es paralelo al ∇T) o tensorial si el medio es anisotrópico (ya no estarán alineados \vec{q} y ∇T). Recuérdese (Cap. 10) que si hay otras fuerzas pueden aparecer flujos acoplados, como se ha visto en el estudio de los fenómenos termoeléctricos. El signo $-$ en la ley de Fourier indica que el calor fluye en sentido contrario al del gradiente de temperaturas.

Convección de energía térmica asociado al flujo de masa. Se trata de la conducción de calor en la pared que confina un fluido en movimiento, pero para calcularlo se necesitaría saber el gradiente de temperatura en la pared ($\vec{q}_{pared} = -k\nabla T_{pared}$), que depende fuertemente del movimiento del fluido y obliga a resolver al mismo tiempo el problema fluidodinámico y el térmico (ecuaciones de Navier-Stokes), necesitándose normalmente el cálculo numérico. Las correlaciones (numéricas o experimentales) entre la diferencia de temperaturas característica entre el fluido y la pared, ΔT , y el flujo de calor en la pared, \dot{q} , se presentan a través de la llamada ecuación de Newton (1701), $\dot{q} = h\Delta T$, que sirve de definición de h , llamado coeficiente de transmisión de calor por convección, coeficiente convectivo o transmitancia térmica.

Radiación de energía electromagnética de longitud de onda entre $\lambda \approx 10^{-7}$ m y $\approx 10^{-4}$ m. Puede decirse que es debida al movimiento direccional de partículas inmateriales, llamadas fotones, que viajan en línea recta a la velocidad de la luz ($c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s en el vacío) con una frecuencia $\nu = c/\lambda$ del orden de 10^{14} Hz. Si $\lambda < 10^{-7}$ m, la radiación es tan energética (se dice que es ionizante) que al interactuar con la materia da lugar a reacciones químicas de disociación e ionización que enmascaran los posibles efectos térmicos. Si $\lambda > 10^{-4}$ m, la radiación es tan poco energética que se transmite a través de los cuerpos con escasa absorción. La emisión de energía térmica de un cuerpo sólido por unidad de superficie, e , se modeliza con la ley de Stefan-1879, $e = \epsilon\sigma T^4$, siendo ϵ un coeficiente de emisión llamado emisividad, σ una constante (llamada de Stefan-Boltzmann, pues fue este último quien la dedujo teóricamente, en 1884) y T la temperatura de la superficie. Nótese que la emisión de radiación de un cuerpo es independiente de la presencia de otros, y que la transmisión de calor será debida a una desigualdad en el balance radiativo entre los diversos sistemas.

La transmisión de calor es de enorme importancia práctica, no sólo para el estudio de aparatos específicos como los cambiadores de calor, evaporadores, condensadores, radiadores y torres de refrigeración, sino en todos los procesos de combustión (interna o externa), fisión y fusión nuclear, y de protección térmica (aislamiento, ventilación, acondicionamiento ambiental, ablación, tratamientos térmicos de los materiales, etc).

Ley de Fourier: conductividad de metales, no metales y aislantes

Nótese que la ecuación de Fourier, $\vec{q} = -k\nabla T$, es vectorial. La conductividad k depende del medio y de su estado (varía un poco con la temperatura, pero la presión apenas influye) y,

aunque casi siempre se toma como escalar, tiene carácter tensorial para medios anisotrópicos como muros de ladrillo hueco, cemento armado, madera, materiales fibrosos, núcleos de transformador, monocristales, etc. En cualquier caso, en la mayoría de las aplicaciones prácticas suele considerarse constante (escalar e independiente de la temperatura) para cada material.

La medida de k en los fluidos (y en los medios semitransparentes) es muy complicada, pues es difícil evitar la convección (y la radiación). Para los sólidos metálicos se mide k en una varilla larga aislada lateralmente, y para los no metálicos se mide k en un disco plano, delgado, entre bloques de cobre. Las medidas más precisas de k se hacen en régimen transitorio rápido a través de la difusividad térmica (ver más adelante). Cuando en lugar de medir k se toma de un banco de datos, la incertidumbre puede ser de $\pm 20\%$, debido a las impurezas de los materiales.

Es interesante observar que la ley de Fourier aplicada al flujo de calor entre dos cuerpos a temperatura T_1 y T_2 , separados por un tercer medio de conductividad k , permite las siguientes realizaciones:

- Calcular $k = (\dot{Q}L) / [A(T_1 - T_2)]$ a partir de la geometría (espesor L y sección transversal A del aislante), las temperaturas (medidas con sendos termómetros) y el flujo de calor (medido p.e. por disipación eléctrica en régimen estacionario en uno de los cuerpos).
- Calcular $\dot{Q} = kA(T_1 - T_2) / L$ a partir de la geometría, la diferencia de temperaturas y la conductividad del material (que aquí se supone conocida).
- Calcular $T_2 = T_1 - \dot{Q}L / (kA)$, es decir, calcular la temperatura de un cuerpo basado en la medida del flujo de calor (p.e. mediante disipación eléctrica estacionaria en el cuerpo a T_1). En los animales, la apreciación de temperaturas por el sentido del tacto se basa en este procedimiento, detectando \dot{Q} (a 37°C en el hombre) a geometría fija, pero tiene el problema de que al variar la transmitancia térmica global (la k equivalente) y no compensarla el organismo, resulta que dos cuerpos a la misma temperatura T_2 parece que están a distintas temperaturas (más frío el de más k), y por eso también parece que el agua del grifo siempre sale más fría que el aire ambiente, siendo que la media diaria o anual ha de ser prácticamente la misma.

Según el valor de la conductividad térmica, los materiales pueden clasificarse así:

Metales. Su $k \approx 10^2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (p.e. $k_{\text{Cu}}=360$, $k_{\text{Al}}=220$, $k_{\text{Fe}}=70$, $k_{\text{acero}}=40$). Son buenos conductores por los electrones libres (la ley de Lorentz-1881, que relaciona las conductividades térmica k y eléctrica σ , establece que $k/(\sigma T) = (\pi^2/3)(k_B/e)^2 = 2,5 \cdot 10^{-8} \text{ W}\Omega/\text{K}^2$, siendo k_B la constante de Boltzmann y e la carga del electrón, y se cumple con una aproximación $\approx 10\%$, aunque la plata alemana conduce muy bien la electricidad y mucho peor el calor).

No metales. Su $k \approx 1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (p.e. $k_{\text{agua}}=0,6$; $k_{\text{hielo}}=2$; $k_{\text{vidrio}}=0,8$; $k_{\text{madera}}=0,2$).

Aislantes. Su $k \approx 10^{-2} \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (p.e. $k_{\text{aire}}=0,02$). Para gases, la teoría cinética enseña (10.32) que k es proporcional a $(T/M)^{1/2}$. Según su estructura, pueden clasificarse en:

- pulverulentos : $k_{\text{serrín}}=0,07 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, $k_{\text{corcho}}=0,04 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.
- fibrosos : como la lana animal o la lana de vidrio, ambas con $k_{\text{lana}}=0,04 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.
- espumosos:
 - cerámicos (en realidad son refractarios): $k_{\text{alúmina}}=0,6 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$; $k_{\text{sílice}}=0,2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.
 - orgánicos $k \approx 0,04 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Se dilatan mucho ($\alpha \approx 10^{-2} \text{ K}^{-1}$) por lo que no conviene pegarlos. Los termoplásticos (como la espuma blanca de poliestireno expandido) ceden a unos $100 \text{ }^\circ\text{C}$ y son frágiles por debajo de $-100 \text{ }^\circ\text{C}$. Los termoestables (como el poliuretano) son muy flexibles.
- multicapa : son capas de papel, plástico o metal, con recubrimientos reflectores, separadas por espuma o fibra al vacío (hay que evacuar el aire si se quiere $k < 0,02 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$). Se llega hasta $k \approx 10^{-4} \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

Los aislantes térmicos son de utilidad para mantener temperaturas extremas, p.e. para que éstas no sean accesibles desde el exterior (por seguridad, para evitar condensaciones, o simplemente para ahorrar energía).

Se dice que un material es refractario cuando es aislante térmico y resistente a altas temperaturas (tienen alto punto de fusión y suelen ser porosos). Pueden ser ácidos (arcillas refractarias), básicos (CaO , MgO , Al_2O_3) o neutros (grafito, carburos). Se suelen usar en bloques cerámicos o en mantas fibrosas. Se usan para mantener materiales a alta temperatura (hornos, hogares, cucharas metalúrgicas, etc), y para su estudio se les somete a ensayos de choque térmico (a $1000 \text{ }^\circ\text{C}$) y ensayos mecánicos (probeta normalizada de $150 \times 25 \times 25 \text{ mm}^3$).

Ecuación del calor y condiciones de contorno

La ecuación del calor no es más que el balance energético ($Q = \Delta E - W$) para una masa de control infinitesimal $dm = \rho dV$ entre dos instantes t y $t + dt$, teniendo en cuenta la ley de Fourier. Se supone que el proceso es a presión constante (para sólidos y líquidos apenas hay diferencia, y para gases, aunque sí la hay, suelen ser de más interés los procesos a $p = \text{cte}$); además, la degradación de energía mecánica por fricción se considera aparte, junto a otros procesos disipativos. Por tanto, $Q = \Delta E + p\Delta V = \Delta H_f \approx \Delta H$ si la variación de la energía mecánica del sistema es despreciable. Es decir, la ecuación básica es:

$$\frac{dH}{dt} = - \int_A \vec{q} \cdot \vec{n} dA \quad \text{con} \quad \vec{q} = -k\nabla T \quad \text{a través de la frontera A} \quad (11.1)$$

(siendo \vec{n} el vector normal unitario), que es válida aunque haya cambios de fase y reacciones internas. Si el flujo de calor varía suavemente con la distancia (en unidimensional sería $(\dot{q} + d\dot{q}) - \dot{q}$) se puede aplicar el teorema de Gauss-Ostrogradski¹, $\int_A \vec{q} \cdot \vec{n} dA = \int_V \nabla \cdot \vec{q} dV$, y, si

1. Ver p.e. Kudriávtssev, L.D., "Curso de análisis matemático", Mir, 1983.

además la densidad no varía con el tiempo, para el sistema de control constituido por una masa fija de volumen unitario se verificará:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (11.2)$$

donde se han puesto derivadas parciales para significar que ahora la entalpía por unidad de masa h se va a considerar una variable de campo $h(\vec{x}, t)$ y no sólo la entalpía de un sistema como era antes. Nótese que (11.1) se aplica a una masa de control (frontera impermeable) y por tanto (11.2) también, así que en realidad debería figurar la derivada sustancial $Dh/Dt \equiv \partial h/\partial t + \vec{v} \cdot \nabla h$ o total (siguiendo a la masa de control en su movimiento), aunque al no considerar que exista movimiento relativo la derivada total coincide con la parcial (y el volumen de control coincide con el de la masa de control).

En la ecuación (11.2) todavía se necesita especificar la relación entre h y T , lo cual puede hacerse dando la función $T(h)$, que es continua, o la $h(T)$ que puede presentar discontinuidades en los puntos de cambio de fase. Además, habrá que tener en cuenta las variaciones de entalpía no térmica (eléctrica, química (p.e. durante el fraguado del hormigón), nuclear, etc.), que en este estudio se supone dato (aunque a veces depende de la temperatura y hay que resolver el problema en conjunto).

Si se supone $\rho \partial h/\partial t = \rho c \partial T/\partial t - \phi$ (siendo ρ la densidad, c la capacidad térmica a presión constante y ϕ la disipación de energía interna por unidad de volumen y tiempo), y se supone k constante, se obtiene la ecuación del calor en su forma más corriente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{\phi}{\rho c} \quad \text{siendo} \quad a \equiv \frac{k}{\rho c} \quad \text{la difusividad térmica} \quad (11.3)$$

Esta ecuación diferencial en derivadas parciales, parabólica, lineal y de segundo orden, es una de las más famosas de toda la Física matemática. En el caso estacionario pasa a ser una ecuación elíptica de tipo Poisson, y si además es $\phi=0$, se reduce a la ecuación de Laplace $\nabla^2 T=0$, que tantas veces aparece en distintos problemas físicos (electrostática, hidrodinámica, etc). La difusividad térmica a es de $\approx 10^{-4}$ m²/s para metales y gases y de $\approx 10^{-6}$ m²/s para no metales y líquidos.

Condiciones de contorno temporales: los problemas pueden ser estacionarios, periódicos y transitorios. El tiempo de relajación es $\approx L^2/a$, siendo L una longitud característica (p.e., un huevo de unos 2 cm de radio tarda en enfriarse unos $(2 \cdot 10^{-2})^2/10^{-6}=400$ s). Si existe otro tiempo característico se define el número de Fourier $Fo \equiv at/L^2$ para tener una idea del grado de avance del problema transitorio hacia el estacionario.

Condiciones de contorno espaciales: pueden estar en la frontera o en interfases internas. En la frontera las más comunes son $T=cte$ (límite de baño térmico muy agitado), $\nabla_n T=0$ (gradiente normal nulo por límite de frontera adiabática) y $\nabla_n T=h(T-T_\infty)/k$ (caso general de convección desde un fluido exterior a temperatura T_∞ y transmitancia térmica h). En este último caso, el más general y corriente, ya que haciendo $h \rightarrow \infty$ se recupera el primer caso y con $h \rightarrow 0$ el segundo, se define el número de Biot $Bi \equiv hL/k$ para medir el efecto de la transmitancia

exterior. No debe confundirse Bi con el número de Nusselt (que se definirá en problemas de convección térmica como $Nu=hL/k$, pues en éste, la h , L y k son las del fluido, mientras que en Bi la h es la del fluido, pero L y k son las del sólido).

En las interfases las condiciones de contorno son en el salto de temperaturas y en el salto de su gradiente. Llamando T_+ y T_- a las temperaturas a un lado y otro de la interfase, se tendrá que $T_+-T_-=\Delta T_{\text{contacto}}$, que se llama resistencia térmica de contacto y suele considerarse dato. Sobre todo en las uniones entre metales, $\Delta T_{\text{contacto}}$ puede ser grande, y es debida al espesor de la unión, al adhesivo, al aire atrapado, a la presión de unión, etc.; cuando interesa disminuirla se usan juntas de metales blandos. Al variar la conductividad térmica a través de la interfase y si existen fuentes o sumideros de calor interfaciales (p.e. por fricción) se deberá verificar $k_+\nabla T_+-k_-\nabla T_-=\phi_{\text{interfacial}}$.

Hay que apuntar también que en muchos problemas técnicos de conducción térmica se utiliza el factor geométrico de Langmuir $S=A_{\text{media}}/L_{\text{media}}$ tal que $Q=kS(T_2-T_1)$, como en el ejemplo de la Fig. 11.1.

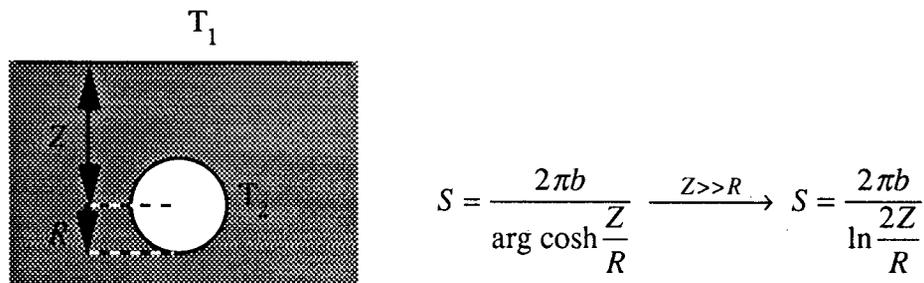


Fig. 11.1. Ejemplo de utilización del factor geométrico de Langmuir S (se ha de calcular aparte con la ecuación del calor). Tanto la tubería enterrada como el ambiente se suponen isotermos, y b es la longitud perpendicular al dibujo.

Conducción unidimensional estacionaria en pared plana compuesta, cilindro y esfera: fuentes y sumideros

La ecuación del calor sin fuentes ni sumideros y en régimen estacionario es la de Laplace $\nabla^2 T=0$. El caso de paredes compuestas es de interés práctico porque así se consigue más fácilmente cubrir las diversas necesidades ingenieriles: estructurales, térmicas, mecánicas, químicas, etc.; una sirve de estructura, otra aguanta el calor, otra la presión, otra aísla del ambiente, etc. En todos estos casos se supondrá flujo unidimensional de calor perpendicular a la pared.

Si la geometría es plana el perfil es lineal como se indica en la Fig. 11.2, donde los datos suele ser $k_{i,j}$, A , T_o y T_n y las incógnitas \dot{Q} y las T_i . La solución para el caso de condiciones de contorno en temperatura (Fig. 11.2a) se puede poner como:

$$\dot{Q} = k_{0,1}A \frac{T_1 - T_0}{L_{0,1}} = k_{1,2}A \frac{T_2 - T_1}{L_{1,2}} = \dots = k_{n-1,n}A \frac{T_n - T_{n-1}}{L_{n-1,n}} = \frac{T_n - T_0}{\frac{R}{A}} = UA(T_n - T_0) \quad (11.4)$$

y, para el caso de condiciones de contorno en flujo de calor (Fig. 11.2b) se puede poner como:

$$\dot{Q} = h_{0,1}A(T_1 - T_0) = k_{1,2}A \frac{T_2 - T_1}{L_{1,2}} = \dots = h_{n-1,n}A(T_n - T_{n-1}) = \frac{T_n - T_0}{\frac{R}{A}} = UA(T_n - T_0) \quad (11.5)$$

siendo R la resistencia térmica y U la transmitancia térmica (o coeficiente global de transmisión de calor), definidas por las igualdades correspondientes en (11.4) y (11.5). En general, este tipo de ecuaciones se pueden enunciar así:

$$\text{Flujo de calor} = \frac{\text{Fuerza de escape térmica}}{\text{Resistencia térmica}} = \text{Conductancia térmica} \times \text{Fuerza de escape térmica}$$

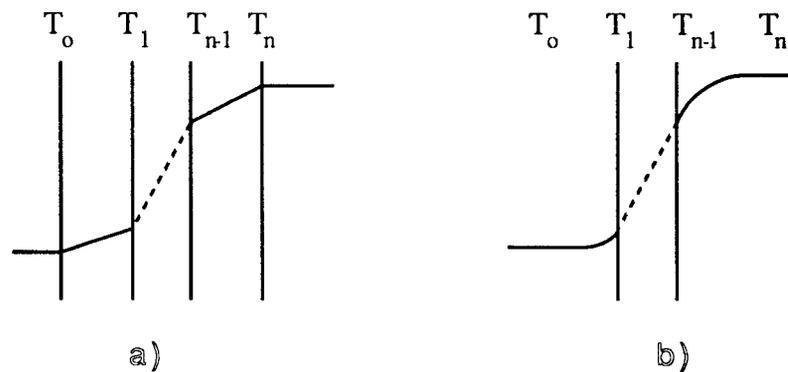


Fig. 11.2. Perfil de temperaturas y flujo de calor en una pared plana compuesta en régimen estacionario: a) caso de condiciones de contorno en temperatura, b) caso de condiciones de contorno en flujo de calor (aunque aquí se supone que es por convección, pudiera ser también por radiación).

Nótese la analogía con el problema eléctrico que se obtendría al sustituir diferencias de temperatura por diferencias de potencial eléctrico, calor por intensidad eléctrica y resistencia térmica por resistencia eléctrica.

A veces es muy importante la resistencia debida a las costras que se forman sobre las superficies de transmisión de calor durante su utilización (depósito de sales en calderines, de hollín en hogares, etc) o a un mal contacto entre superficies conductoras.

Si la geometría es cilíndrica (coordenadas r, θ, z), la ecuación del calor, que toma la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\phi}{\rho c} \\ \text{con } \vec{q} &= -k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{u}_z \right) \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

en régimen estacionario y unidimensional da como solución general $T=A \ln r + B$, con una resistencia térmica $R = \ln(R_{ext}/R_{int}) / (2\pi Lk)$ siendo L la longitud axial. El flujo de calor es $\dot{Q} = (k2\pi RL / (R \ln(R_{ext}/R_{int}))) \Delta T$. Un caso curioso y de gran interés es el siguiente. En el aislamiento exterior de cilindros en presencia de una atmósfera convectiva de $h=cte$, puede aparecer un radio crítico r_{cr} (o espesor de aislante crítico) tal que al aumentar el espesor de aislante lo que ocurra sea que se favorezca el flujo de calor por el aumento de área. En efecto, si se consideran datos R_{int}, T_{int}, k, h y T_∞ e incógnitas $\dot{Q}(R_{ext})$ y $T_{ext}(R_{ext})$, es fácil ver que:

$$\dot{Q} = 2\pi Lk \frac{T_{ext} - T_{int}}{\ln \frac{R_{ext}}{R_{int}}} = 2\pi R_{ext} Lh(T_{\infty} - T_{ext}) \quad (11.7)$$

presenta un máximo cuando $Bi = hr_{cr}/k = 1$. En la práctica, $r_{cr} = k/h$ resulta ser del orden de algunos milímetros, por lo que sólo al aislar cables eléctricos se presentará esta paradójica situación, que se usa provechosamente para enfriar los conductores usando buenos aislantes eléctricos que suelen ser también aislantes térmicos.

Si la geometría es esférica (coordenadas r, θ, ϕ), la ecuación del calor, que toma la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] + \frac{\phi}{\rho c} \\ \text{con } \vec{q} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \vec{u}_\phi \right) \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

en régimen estacionario y unidimensional da como solución general $T = A/r + B$, con una resistencia térmica $R = (R_{ext} - R_{int}) / (4\pi R_{ext} R_{int} k)$ y un flujo de calor $\dot{Q} = (k4\pi R^2 / (R^2 \Delta R / R_{int} R_{ext})) \Delta T$. Como en el caso cilíndrico, puede aparecer aquí un radio crítico, que en este caso vale $r_{cr} = k/(2h)$.

Cuando existen fuentes volumétricas o superficiales, la ecuación $\nabla^2 T + \phi/k = 0$ (donde ϕ es la disipación de energía por unidad de volumen) se resuelve de modo similar. Si se mantiene la temperatura de la pared exterior a T_o , los perfiles que se obtienen son:

- Fuente volumétrica plana: $T = -[\phi/(2k)]x^2 + Ax + B$; $T - T_o = [\phi L^2/(4k)][1 - (2x/L)^2]$ con $\dot{Q}/A = \phi L/2$.
- Fuente volumétrica cilíndrica: $T = -[\phi/(4k)]r^2 + A \ln r + B$; $T - T_o = [\phi R^2/(4k)][1 - (r/R)^2]$ con $\dot{Q}/A = \phi R/2$. Nótese que $\dot{Q} = \phi \pi R^2 L$ y por tanto $T_R - T_o = \dot{Q}/(4\pi kL)$ es independiente de R .
- Fuente volumétrica esférica: $T = -[\phi/(6k)]r^2 + A/r + B$; $T - T_o = [\phi R^2/(6k)][1 - (r/R)^2]$ con $\dot{Q}/A = \phi R/3$. Nótese que $\dot{Q} = \phi(4/3)\pi R^3$, como era de esperar.
- Fuente superficial plana entre paredes iguales: $T - T_o = [\phi L/(2k)][1 - x/L]$.
- Fuente superficial cilíndrica de radio R : el perfil de temperatura ha de ser plano hacia el centro e igual al valor en el radio de deposición $T_R - T_o = (\phi R/k) \ln(R/R_{ext})$. Nótese que $T_R \rightarrow \infty$ cuando $R_{ext} \rightarrow \infty$.
- Fuente superficial esférica de radio R : el perfil de temperatura ha de ser plano hacia el centro e igual al valor en el radio de deposición $T_R - T_o = (\phi R^2/k)[1/R - 1/R_{ext}]$. Nótese que ahora T_R sí tiene límite aunque $R_{ext} \rightarrow \infty$.

Conducción casi-unidimensional: aletas

Se considera ahora la conducción en régimen estacionario a lo largo de materiales de conductividad constante k y sección transversal $A(x)$ lentamente variable (aletas), en presencia de una atmósfera a T_∞ que proporciona un baño térmico de transmitancia constante h . Otros casos de interés, como aleta radiante, o colectora de radiación, o con $T_\infty(x)$, o con $k(x)$, se dejan como ejercicio.

El balance energético para una sección de área A , espesor dx y área mojada A_w es $q(x+dx)A(x+dx)+q_w(x)A_w(x)-q(x)A(x)=0$, donde $q=-kdT/dx$ y $q_w=h(T-T_\infty)$. Ciñéndose al caso de aletas unidimensionales ($dA/dx=0$) y llamando p al perímetro de la sección recta, la ecuación anterior pasa a ser $-kA(dT/dx+d^2T/dx^2)+hpdx(T-T_\infty)+kAdT/dx=0$, que se reduce a $d^2T/dx^2-(T-T_\infty)hp/(kA)=0$, cuya solución, suponiendo extremo adiabático, es $(T-T_\infty)/(T_o-T_\infty)=\cosh[m(L-x)]/\cosh(mL)$, y $Q_{raiz}=mkA(T_o-T_\infty)\tanh(mL)$, siendo T_o la temperatura en la raíz de la aleta y $m=(hp/(kA))^{1/2}$.

Se acostumbra a definir el llamado rendimiento de aleta como el cociente entre el calor evacuado por ella y el que habría evacuado si toda ella hubiese permanecido a la temperatura de la raíz, es decir, $\eta=kAdT/dx|_{x=0}/(hA_w(T_o-T_\infty))$, obteniéndose en el caso considerado $\eta=\tanh(mL)/(mL)$. Otras veces se llama rendimiento de aleta al cociente entre el calor que sale por la raíz con y sin aleta, obteniéndose en este caso $\eta=[A/(pL)]\tanh(mL)/(mL)$

Sólo es práctico poner aletas si $Q_{raiz} \gg hA(T_o-T_\infty)$, p.e. $kp/(hA) > 5$ (o lo que es lo mismo, si es espesor $< k/h$). Para poder considerar la aleta independiente, la distancia entre aletas ha de ser por lo menos el doble del espesor de la capa límite hidrodinámica.

Comportamiento transitorio: inercia térmica

De la ecuación del calor, $\partial T/\partial t = a\nabla^2 T$, se deduce que el tiempo de relajación térmica en el interior de un sólido será del orden de L^2/a , siendo L una longitud característica (p.e. una esfera de 0,1 m tardará en uniformizar su temperatura (calentándose o enfriándose) $\approx 10^2$ s si es metálica y $\approx 10^4$ s si no lo es). Por otra parte, del balance energético $dH/dt = -\int \vec{q} \cdot \vec{n} dA$ para un sólido en un baño térmico de coeficiente de convección h , el tiempo de relajación hasta la temperatura del baño será $t_{relaj} = \rho c V / (hA)$, siendo V su volumen y A el área bañada.

Un caso fácil de analizar es aquél en que el tiempo de relajación interna es mucho menor que el tiempo de relajación con el exterior, es decir, cuando $Bi = hL/k \rightarrow 0$, que corresponde al caso en que las variaciones espaciales de temperatura son pequeñas (excepto en la capa límite de la frontera), pudiendo aproximarse $H = \rho V c (T - T_o)$, con lo que, si el flujo de calor es debido a un baño a temperatura T_∞ con transmitancia constante h , la ecuación del calor, $dH/dt = -\int \vec{q} \cdot \vec{n} dA$, se resuelve para dar $(T - T_\infty)/(T_o - T_\infty) = \exp(-BiFo)$. Esta aproximación da errores menores del 5% para $Bi < 0,1$. Por ejemplo, para un bulbo de 25 mm de largo y 3 mm de diámetro de un termómetro de mercurio ($k = 30 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) en un baño de aire (convección natural con $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$), $Bi = 10^{-3}$, y el tiempo de relajación en que se alcanza el 99% del salto de temperatura impuesto es de unos 6 s.

Otro caso sencillo y muy ilustrativo es el de la conducción unidimensional en un medio homogéneo semiinfinito cuya superficie libre está sometida a oscilaciones periódicas de temperatura en la forma $T_o(t) = T_{media} + \Delta T_o \sin(2\pi t/\tau)$. La solución periódica de la ecuación del calor $\partial T/\partial t = a \partial^2 T/\partial x^2$ da:

$$T(x,t) = T_{media} + \Delta T_o \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{a\tau/\pi}}\right) \sin\left(2\pi \frac{t}{\tau} - \frac{x}{\sqrt{a\tau/\pi}}\right) \quad (11.9)$$

Es fácil ver que las oscilaciones se van amortiguando y para $x \gg (a\tau/\pi)^{1/2}$ ya apenas varía (así que aunque se ha hecho para un medio semiinfinito vale para paredes de espesor mucho mayor que el antedicho). Es de destacar también el retraso en fase que se introduce al penetrar la onda térmica, pues lo hace con velocidad finita constante e igual a $2(\pi a/\tau)^{1/2}$. Por ejemplo, tomando para la tierra $a=10^{-6}$ m²/s, resulta que la onda térmica diaria (por rotación de la tierra respecto al sol, con $\tau=86400$ s) penetra poco más de $x \gg (a\tau/\pi)^{1/2} = 0,2$ m (por eso pueden rebrotar las plantas tras una helada nocturna) llegando allí la onda con un retraso de $\tau/(2\pi) \approx 4$ horas, y la onda anual (debida a la inclinación del ecuador sobre la eclíptica, con $\tau=3.10^7$ s) penetra poco más de 3 m (llegando allí con un retraso de algo menos de dos meses).

El último caso que se analiza aquí es el de la conducción unidimensional en un medio homogéneo semiinfinito cuya superficie libre se ve sometida a un salto (escalón) de temperatura $T_o - T_\infty$, cuya solución es $(T_o - T)/(T_o - T_\infty) = \text{erf}(x/(4at)^{1/2})$, donde erf(x) es la función error de Gauss (Apéndice 2).

Además de los efectos de la inercia térmica, los transitorios térmicos pueden tener otros efectos deseables o indeseables, ya que grandes ∇T dan lugar a grandes esfuerzos mecánicos (grietas, rotura de vidrios², zunchado, etc) y a altas temperaturas (se chamusca el calzado antes de calentarse los pies, se agarra la comida en las cacerolas, coagula la clara y no la yema en los huevos pasados por agua, no crece el grano de los materiales metálicos al templarlos, etc).

Métodos numéricos

Además de los métodos analíticos, de los métodos gráficos iterativos usados antiguamente³ y de las múltiples analogías físicas (papel electroconductor, célula de Hele-Shaw) que se han ideado para resolver los problemas de conducción de calor, hoy día sólo se resuelven los problemas de transmisión de calor por cálculo numérico con ayuda de ordenador, utilizándose la teoría para comprobar los órdenes de magnitud y resolver algún problema modélico por desarrollos en serie u otros métodos que también requieren en último término el cálculo numérico por ordenador.

2. Al echar agua hirviendo a un vaso de vidrio normal se generan grandes tensiones internas por dilatación diferencial y pueden agrietarlo. Para evitarlo hay que reducir la inercia térmica usando vasos de pared muy delgada, disminuir el choque térmico introduciendo una cucharilla metálica, etc.

3. Puede verse p.e. Holman, J.P., "Heat transfer", McGraw-Hill, 1986.

De los varios métodos numéricos que se han desarrollado (diferencias finitas, elementos finitos, elementos de contorno, Monte Carlo, etc) sólo se va a tratar aquí el de diferencias finitas. Las siguientes consideraciones son de aplicación:

1. La incertidumbre en la utilización de los datos térmicos recopilados es alta ($\pm 20\%$ en k debido a las impurezas, $\pm 30\%$ en h debido al campo de velocidades, llegando a 50% si hay cambio de fase, $\pm 50\%$ en ϵ debido a la oxidación y contaminación) y, por tanto, de poco vale exigir más exactitud al método de cálculo.
2. Conviene utilizar algoritmos ajustados a cada tipo de problema (unidimensional, bidimensional, tridimensional, propiedades variables en el espacio, propiedades variables con la temperatura, cambio de fase, etc), ya que el programa debe resultar comprensible al usuario y sobre todo de rápida ejecución, pues si no es interactivo no se tiende a ensayarlo. Esto no significa que para cada problema haya que desarrollar un programa específico, pues su depuración también comprometería su rendimiento.
3. Para el planteamiento, se hace un esquema gráfico y se pone una malla (discretización) de puntos (nodos) en los que interesa calcular la temperatura (por eso debe haber un nodo en cada interfase). Conviene que la malla sea lo más sencilla posible, pero cuantos más nodos más resolución y más precisión (hasta cierto límite), por lo que suele elegirse entre 5 y 50 nodos por dimensión. La discretización temporal siempre se hace igual, desarrollo en serie de Taylor, pero la discretización espacial es distinta en el método de diferencias finitas (MDF) y en el método de elementos finitos (MEF); en el MDF la celda está centrada en el nodo, mientras que en el MEF la celda está limitada por los nodos cercanos (p.e. tres para mallas triangulares y cuatro para mallas tetraédricas).
4. A cada nodo (en el MDF) se le asigna una celda de material (p.e. dividiendo por la mitad la distancia entre nodos), de tal manera que cada celda quede bien representada por unos valores T , ρ y c característicos y cada separación interceldilla por una k adecuada. Si hay fuertes gradientes de temperatura la malla ha de ser muy fina para que el suponer que la temperatura del nodo es uniforme no invalide el cálculo.
5. Se hace un balance energético de cada celda discretizando la variable tiempo en la forma $\partial T / \partial t = (T_{nueva} - T_{vieja}) / \Delta t$, y las variables espaciales en la forma $\partial T / \partial x = (T_{x+\Delta x} - T_{x-\Delta x}) / (2\Delta x)$ y $\partial^2 T / \partial x^2 = (T_{x+\Delta x} - 2T_x + T_{x-\Delta x}) / \Delta x^2$ (diferencias centradas). Así se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas a resolver, siendo T_{nueva} de cada celda la incógnita y empezando por unas T_{vieja} conocidas inicialmente (método explícito).
6. Lo más característico de cada problema son sus condiciones de contorno, que se tratarán con extremo cuidado fuera de la rutina general de las celdas interiores. Conviene incluir las interfases exteriores como nodos adicionales de la malla, aunque en realidad estén infinitamente lejos. Nótese que si las condiciones de contorno impuestas se separan mucho de las iniciales, aparecerán enormes gradientes (ficticios, pues realmente nunca se podrá forzar esas condiciones físicamente) en el instante inicial que pueden invalidar la discretización.

7. Si se trata de un problema estacionario, suele ser conveniente resolver su problema transitorio completo hasta llegar al estado estacionario; por una parte es más ilustrativo, y por otra, muchos métodos para problemas estacionarios son iterativos, luego parece lógico que sea la variable física tiempo y no otra sin sentido físico la que controle la iteración.

Como ejemplo, para problemas bidimensionales estacionarios de propiedades constantes se puede usar los siguientes esquemas:

- Método directo: $T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1} = 0$, se numeran todas las incógnitas, se construye la matriz de coeficientes y se invierte.
- Método iterativo: $T_{i,j,nueva} = (T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1})/4$.
- Método de relajación: se calcula T_{nueva} por el método iterativo, pero se pone: $T_{mejor} = T_{nueva} + \omega(T_{nueva} - T_{vieja})$, con un factor de ponderación $1 < \omega < 2$.

Para problemas unidimensionales transitorios se puede usar:

- Método explícito: $T_{i,nueva} - T_i = Fo(T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1})$, pero que exige para que sea estable que $Fo = a\Delta t/\Delta x^2 \leq 1/2$ y si las condiciones de contorno son convectivas, también $Fo(1+Bi) \leq 1/2$. Para multidimensional el límite es $Fo[1 + (\Delta x/\Delta y)^2 + (\Delta x/\Delta z)^2] \leq 1/2$.
- Método implícito: $T_{i,nueva} - T_i = Fo(T_{i+1,nueva} - 2T_{i,nueva} + T_{i-1,nueva})$, que da lugar a un sistema tridiagonal $T_{i-1,nueva} + (1/Fo - 2)T_{i,nueva} + T_{i+1,nueva} = T_i/Fo$.
- Método de Crank-Nicholson (1947): consiste en usar como mejor actualización $(T_{i,nueva} - T_i)_{C-N} = [(T_{i,nueva} - T_i)_{explícito} + (T_{i,nueva} - T_i)_{implícito}]/2$ y es más preciso que el implícito.

El método explícito introduce además una difusión térmica ficticia que se propaga a velocidad $\Delta x/\Delta t \approx (k/\rho c)/\Delta x$, función del tamaño Δx de la discretización.

Conducción con cambio de fase

Lo característico de este problema es la singularidad que aparece en el frente de cambio de fase, que será móvil y llevará asociada una deposición/absorción local de energía, pero si se consigue que las fases fluidas no entren en movimiento (salvo que se trate de una transición alotrópica habrá al menos una fase fluida), el problema responde a las mismas ecuaciones que si no hay cambio de fase, es decir, se puede usar la (11.1) con una $H(T)$ apropiada (discontinua en la temperatura de cambio de fase para una sustancia pura), o la (11.3) con $\phi_{volumétrico} = 0$ pero $\phi_{interfacial} <> 0$.

Debido a su gran inercia térmica, los sistemas con cambio de fase son muy utilizados para regulación y almacenamiento térmico (Cap. 19). El efecto amortiguador del mar para las variaciones día-noche y verano-invierno de la temperatura se debe principalmente a esta

causa (aunque también contribuye a ello la diferencia de capacidades térmicas del agua y el suelo, que es de 4:1). En las aplicaciones técnicas de acumuladores térmicos sólo se utiliza el cambio de fase sólido-líquido para evitar grandes variaciones de volumen, pero aun así, hay que prever un volumen de compensación no sólo para las dilataciones sino para el cambio de volumen asociado al cambio de fase (típicamente $\approx 10\%$). Si no se quiere depender del campo gravitatorio para el posicionamiento de los contactos térmicos, el recipiente ha de estar totalmente lleno y utilizar un fuelle o membrana para las variaciones de volumen. Conviene también disponer una malla metálica en el interior para aumentar la transmitancia. Como sustancias de trabajo suelen usarse parafinas, sales hidratadas, metales de bajo punto de fusión, sales fundidas, etc., según, claro está, el rango de temperatura de funcionamiento deseado; dichas sustancias han de ser muy puras (la presencia de gases disueltos puede inutilizar el sistema) y aun así los continuos cambios de fase suelen acarrear una degradación de las actuaciones.

Una especial aplicación de la transmisión de calor con cambio de fase es la ablación, donde un material funde y se volatiliza al estar expuesto a muy altas temperaturas, sirviendo así de protección térmica (mientras quede material) a otros sistemas, como se hace en las cápsulas espaciales para la reentrada en atmósferas planetarias donde se generan por fricción miles y decenas de miles de grados.

Se va a analizar en más detalle ahora la transmisión de calor en un sólido que funde, considerándolo como sustancia pura ($T_{fusión}$ única y bien definida) caloríficamente perfecta, caracterizada por las capacidades térmicas c_s y c_l y las conductividades térmicas k_s y k_l del sólido y el líquido respectivamente. Se hace notar que para no tener que introducir efectos convectivos y poder utilizar las ecuaciones anteriormente desarrolladas es preciso asumir que $\rho_s = \rho_l = cte.$

Supóngase que a un sistema de forma arbitraria como el representado en la Fig. 11.3 se le imponen unas condiciones iniciales genéricas $T(\vec{x}, 0)$ (de equilibrio o no) y unas condiciones de contorno genéricas $a + bT(\vec{x}_A, t) + c\nabla T(\vec{x}_A, t) \cdot \vec{n}_A = 0$ (estacionarias o no).

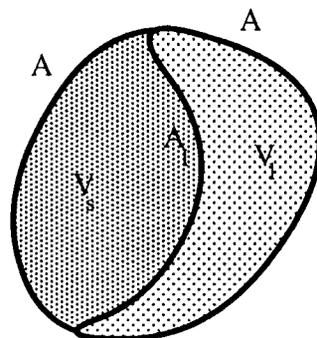


Fig. 11.3. Transmisión de calor con cambio de fase: A, frontera fija exterior donde se aplican las condiciones de contorno; V_s , volumen sólido; V_l , volumen líquido; A_l , superficie móvil que separa la fase sólida de la líquida.

El problema de la transmisión de calor puede plantearse en términos de entalpías (11.1):

$$\rho \frac{\partial h(\vec{x}, t)}{\partial t} = k(h) \nabla^2 T(h) \quad \text{en } V = V_s + V_l \quad (11.10)$$

donde la variable independiente es la $h(\vec{x}, t)$ (cuyo origen se toma a $T=0$) y se hace uso de las funciones auxiliares:

$$k(h) = \begin{cases} k_s & \text{si } 0 \leq h \leq c_s T_f \\ \frac{k_s + k_l}{2} & \text{si } c_s T_f \leq h \leq c_s T_f + h_{sl} \\ k_l & \text{si } c_s T_f + h_{sl} \leq h \end{cases} \quad (11.11)$$

(donde la condición intermedia no debería de darse en teoría, pero surgirá en el cálculo numérico), y:

$$T(h) = \begin{cases} \frac{h}{c_s} & \text{si } 0 \leq h \leq c_s T_f \\ T_f & \text{si } c_s T_f \leq h \leq c_s T_f + h_{sl} \\ \frac{(h - h_{sl})}{c_l} & \text{si } c_s T_f + h_{sl} \leq h \end{cases} \quad (11.12)$$

o en términos de temperaturas:

$$\begin{aligned} \text{Si } \vec{x} \in V_s \quad \rho c_s \frac{\partial T(\vec{x}, t)}{\partial t} &= k_s \nabla^2 T(\vec{x}, t) \\ \text{Si } \vec{x} \in V_l \quad \rho c_l \frac{\partial T(\vec{x}, t)}{\partial t} &= k_l \nabla^2 T(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (11.13)$$

en cuyo caso a las condiciones de contorno hay que añadir las de la interfase (Fig. 11.3):

$$\left. \begin{aligned} a + bT(\vec{x}_A, t) + c \nabla T(\vec{x}_A, t) \cdot \vec{n}_A &= 0 & \text{en } A \\ k_s (\nabla T \cdot \vec{n}_{A_l})_s - k_l (\nabla T \cdot \vec{n}_{A_l})_l &= \rho h_{sl} (\vec{v}_{A_l} \cdot \vec{n}_{A_l}) & \text{en } A_I \end{aligned} \right\} \quad (11.14)$$

Los problemas de frontera móvil son difíciles de resolver por el método de las temperaturas (11.13-14), salvo que la geometría sea tan simple que admita una transformación sencilla que permita utilizar una malla adaptativa en la que la frontera móvil aparezca como fija, por lo que el método entálpico suele ser el único recurso. El caso más elemental, el único que admite una solución analítica sencilla, es el problema de Stefan, que se analiza a continuación.

Problema de Stefan

Sea un sólido semiinfinito inicialmente a la temperatura de fusión, al cual se le aplica un escalón de temperatura en la superficie para fundirlo o solidificarlo (Fig. 11.4).

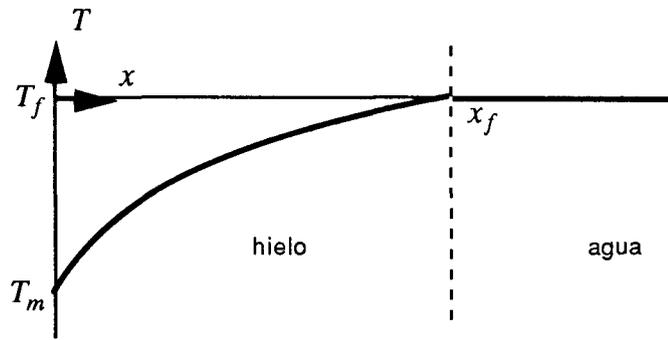


Fig. 11.4. Configuración del problema de Stefan de transmisión de calor con frontera móvil por cambio de fase; se ha ilustrado con el caso concreto de la solidificación de agua.

El problema se reduce a la fase líquida porque en todo el resto del sólido la temperatura seguirá siendo la de fusión, y el planteamiento será:

$$\left. \begin{aligned} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{con } T(x, t = 0) = T_f, \quad T(x = 0, t) = T_m, \\ \text{y } T(x = x_f, t) = T_f, \quad k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_f} = \rho h_{sl} \frac{dx_f}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (11.15)$$

que con el cambio de variables:

$$\theta \equiv \frac{T_f - T}{T_f - T_m}, \quad \chi \equiv \frac{x}{L}, \quad \tau \equiv t \frac{k}{\rho c L^2}, \quad Ja \equiv \frac{c(T_f - T_m)}{h_{sl}} \quad (11.16)$$

(donde L es una longitud irrelevante, y Ja es el llamado número de Jakob, a veces también llamado número de Stefan, a él o a su inverso) toma la forma:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \chi^2}, \quad 0 \leq \chi \leq \chi_f(\tau), \quad \theta(\chi = 0, \tau) = 1, \quad \theta(\chi = \chi_f, \tau) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \Big|_{\chi_f} = \frac{-1}{Ja} \frac{d\chi_f}{d\tau} \quad (11.17)$$

cuya solución es:

$$\theta = 1 - \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{\chi}{2\sqrt{\tau}}\right)}{\operatorname{erf}(\sqrt{a})} \quad \text{con } \sqrt{\pi} \alpha e^{\alpha} \operatorname{erf}(\alpha) = Ja \quad \text{y } \chi_f = 2\sqrt{\alpha\tau} \quad (11.18)$$

siendo α la solución de la ecuación trascendente indicada en (11.18). Es decir, dados unos datos, p.e. para el hielo-agua $T_f=0$ °C, $\rho=1000$ kg.m⁻³, $c=2100$ J.kg⁻¹.K⁻¹, $k=2$ W.m⁻¹.K⁻¹, $h_{sl}=0,33.10^6$ J.kg⁻¹, y con $T_m=-60$ °C, primero se determina $Ja=2100.60/0,33.10^6=0,38$; luego se calcula la raíz de la segunda ecuación en (11.18), resultando ser $\alpha=0,17$; después, para cada valor de t , se obtiene la posición del frente de fusión $x_f = 2\sqrt{\alpha kt} / (\rho c)$, el perfil de temperatura, y el flujo de calor en $x=0$, que también suele ser de interés.

Transporte de masa

Se van a estudiar aquí los procesos de transporte de masa asociados a un gradiente de concentración. Aunque se dice transporte de masa, se trata del transporte de especies químicas por difusión molecular (y por convección másica en el capítulo siguiente), y no de estudiar el movimiento medio de la masa global (típico de la Mecánica de fluidos).

La Termodinámica enseña que los sistemas tienden a evolucionar hacia el estado de equilibrio, en el cual desaparecen las velocidades relativas, y la temperatura, y (si no hay campos de fuerza exteriores) la presión y el potencial químico, son uniformes. La Termodinámica de la evolución enseña que lejos del equilibrio pueden desarrollarse procesos que tiendan a disminuir la entropía (p.e. difusión de especies desde bajas concentraciones a altas), pero sólo si algún otro proceso acoplado genera más entropía de la que pierde el primero.

La difusión es muy efectiva en las mezclas gaseosas y mucho menos en las líquidas, debido a la gran diferencia de camino libre medio. En estado sólido la difusión es despreciable, aunque se logran difusiones superficiales a alta temperatura (de utilidad en tratamientos superficiales de materiales).

Recordemos que para medir la composición de una mezcla se puede utilizar las fracciones molares x_i , las fracciones másicas y_i , las densidades ρ_i , o las concentraciones c_i , definidas como:

$$\left. \begin{aligned} x_i &\equiv \frac{n_i}{\sum n_i} \\ y_i &\equiv \frac{m_i}{\sum m_i} = \frac{n_i M_i}{\sum n_i M_i} = \frac{x_i M_i}{\sum x_i M_i} \\ \rho_i &\equiv \frac{m_i}{V_{mezcla}} = \frac{y_i \sum m_i}{V_{mezcla}} = y_i \rho \\ c_i &\equiv \frac{n_i}{V_{mezcla}} = \frac{\rho_i}{M_i} = \frac{x_i}{\sum x_i M_i} \rho \end{aligned} \right\} \quad (11.19)$$

El balance másico de una especie genérica i , considerada como un fluido con densidad ρ_i y velocidad local (macroscópica) \vec{v}_i , en un volumen de control $dx dy dz$, donde se supone que puede haber una fuente o sumidero de especies w_i por reacciones químicas, será:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} dx dy dz = \left\{ \begin{aligned} &\rho_i v_{x_i} dy dz - \left[\rho_i v_{x_i} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i v_{x_i}) \right] dy dz \\ &+ \rho_i v_{y_i} dz dx - \left[\rho_i v_{y_i} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i v_{y_i}) \right] dz dx \\ &+ \rho_i v_{z_i} dx dy - \left[\rho_i v_{z_i} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_i v_{z_i}) \right] dx dy \end{aligned} \right\} + w_i dx dy dz \rightarrow \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}_i) = w_i \quad (11.20)$$

Sumando para todas las especies e introduciendo la definición de velocidad másica media \bar{v} , se obtiene la bien conocida ecuación del balance másico total (5.22) o (5.26):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \nabla \cdot (\rho_i \bar{v}_i) = 0, \text{ y con } \bar{v} \equiv \frac{1}{\rho} \sum \rho_i \bar{v}_i \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \bar{v} \quad (11.21)$$

Nótese que análogamente se podría haber introducido la velocidad molar media $\bar{v}^* \equiv \sum c_i \bar{v}_i / \sum c_i$, la cual tendría en general otro valor.

Ley de Fick

La relación más sencilla entre el flujo de masa de un componente \bar{j}_i y el gradiente de concentración que lo ocasiona $\nabla \rho_i$, fue propuesta por el fisiólogo alemán Fick, en 1855:

$$\left. \begin{aligned} \bar{j}_i &\equiv \rho_i (\bar{v}_i - \bar{v}) \equiv \rho_i \bar{v}_{di} = -D_i \nabla \rho_i \\ &\text{o bien } x_i \bar{v}_{di} = -D_i \nabla x_i \\ &\text{o bien } y_i \bar{v}_{di} = -D_i \nabla y_i \\ &\text{o bien } c_i \bar{v}_{di} = -D_i \nabla c_i \end{aligned} \right\} \quad (11.22)$$

donde se supone que sólo hay gradiente de la especie i , y no hay gradiente de otras especies, ni de temperatura, ni de presión, ni campos de fuerza externos. El coeficiente de difusión D_i depende de la especie i , de la temperatura, de la presión (poco) y de las demás especies j . A \bar{v}_{di} , definida por (11.22), se le llama velocidad de difusión. En primera aproximación, las cuatro formas de (11.22) son equivalentes.

Ecuación de la difusión

A partir de (11.20), con ayuda de (11.22), se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho_i}{Dt} &\equiv \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \rho_i = w_i - \nabla \cdot (\rho_i \bar{v}_i) + \bar{v} \cdot \nabla \rho_i = w_i + \nabla \cdot (D_i \nabla \rho_i - \rho_i \bar{v}) + \bar{v} \cdot \nabla \rho_i = \\ &= w_i + \nabla \cdot (D_i \nabla \rho_i) - \rho_i \nabla \cdot \bar{v} \end{aligned} \quad (11.23)$$

que también se puede escribir como:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \bar{v}) = \nabla \cdot (D_i \nabla \rho_i) + w_i \quad (11.24)$$

En todo el desarrollo posterior se va a introducir la simplificación de considerar que la variación de densidad global ρ debida al transporte de especies es despreciable (implica $\nabla \cdot \bar{v} = 0$), lo cual será válido para pequeñas concentraciones o cuando la difusión de una especie se compense másicamente con la difusión de las otras. Además, se considerará que la difusividad D_i de una especie en una determinada mezcla es constante, con lo que se obtiene finalmente:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\rho_i}{Dt} &= D_i \nabla^2 \rho_i + w_i \\ \frac{Dy_i}{Dt} &= D_i \nabla^2 y_i + \frac{w_i}{\rho} \\ \frac{Dx_i}{Dt} &= D_i \nabla^2 x_i + \frac{Mw_i}{M_i \rho} \\ \frac{Dc_i}{Dt} &= D_i \nabla^2 c_i + \frac{w_i}{M_i} \end{aligned} \right\} \quad (11.25)$$

Nótese la gran similitud entre los procesos de difusión de especies y de difusión de energía térmica (conducción de calor), lo que ha motivado el presentarlos en este mismo capítulo. El equivalente a la ley de Fick (11.22) es la ley de Fourier, $\vec{q} = -k\nabla T$ y el equivalente a la ecuación de la difusión (11.24) es la ecuación del calor, $\partial T/\partial t = a \nabla^2 T + \phi/(\rho c)$, deducida en (11.3).

Como la variación de entropía por variación de composición es $dS = (\mu_i/T)dn_i$ la producción de entropía será $\dot{S}_{gen} = \vec{j}_i \nabla(\mu_i/T)$, siendo \vec{j}_i el flujo molar de sustancia ($\text{mol}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$), y como $\vec{j}_i = c_i \vec{v}_{di} = -D_i \nabla c_i$ y para mezclas ideales $\nabla(\mu/T) = R \nabla x_i/x_i$, se llega a que $\dot{S}_{gen} = c_i D_i [\nabla(\mu/T)]^2/R$.

Difusión unidimensional plana

Este tema se va a desarrollar con un ejemplo: la difusión de vapor de agua desde una superficie líquida hacia una atmósfera no saturada. Se supone que no hay convección (p.e. sería aplicable a la evaporación en un tubo de ensayo y no en una cubeta con aire circulante), que se ha alcanzado el régimen estacionario, que el proceso es isotermo y las simplificaciones usuales (difusividad constante, gases ideales, aire no soluble en agua y sin reacciones químicas).

Si se supone conocida la fracción másica de vapor y_1 a una altura dada z_1 , (Fig. 11.5), y sabiendo que a nivel del líquido z_0 la fracción másica será la de saturación, las ecuaciones de balance másico total y de la especie vapor (i.e. vapor de agua) serán:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow v = cte = v_o, \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}_i) = w_i \Rightarrow y_i v_i = y_i v - D_i \frac{dy}{dz} = cte = v_o \quad (11.26)$$

donde se ha eliminado la notación vectorial por ser el problema unidimensional, se ha tomado $\rho = cte$ y además $\rho v = \rho_i v_i$ es decir, se ha despreciado la velocidad propia del otro componente (aire en calma). El objetivo es determinar la ley de evaporación, es decir, calcular v_o , $y(z)$ y dz_o/dt (Fig. 11.5) en función de las propiedades de los fluidos y las condiciones de contorno impuestas:

$$y|_{z=z_o} = y_o = M_{va} \frac{p^*(T)}{p}, \quad y|_{z=z_1} = y_1 \quad (11.27)$$

(donde $M_{va}=M_v/M_a=0,62$ es el cociente de masas molares del vapor y el aire), lo cual se hace fácilmente con (11.26), obteniéndose:

$$\ln \frac{1-y_1}{1-y_o} = \frac{v_o}{D_i} (z_1 - z_o) \quad \frac{1-y}{1-y_o} = \left(\frac{1-y_1}{1-y_o} \right)^{\frac{z-z_o}{z_1-z_o}} \quad \frac{dz_o}{dt} = - \frac{\rho}{\rho_{\text{líquido}}} v_o \quad (11.28)$$

que en el caso normal de $y \ll 1$ conduce a $v_o = D_i(y_o - y_1)/(z_1 - z_o)$ y un perfil de concentraciones prácticamente lineal.

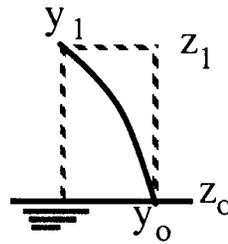


Fig. 11.5. Perfil de concentración de vapor de agua en las inmediaciones de agua líquida ('y' es la fracción másica) en la difusión plana estacionaria en aire en calma.

Pero la evaporación del líquido requiere un aporte de energía $\dot{q}_o = \rho v_o \Delta h_{lv_o}$ (siendo Δh_{lv_o} la entalpía de vaporización a la temperatura de la interfase), que bien puede llegar por radiación desde un cuerpo lejano, o por conducción a través del líquido (o enfriándose éste), o por conducción a través del gas. En este último caso, el balance energético aplicado a la mezcla estacionaria (5.25), será:

$$\frac{\partial(\sum \rho_i e_i)}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q} + \nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) - \nabla \cdot (\sum \rho_i h_i \vec{v}_i)$$

$$\rightarrow \rho_i v_i c_{p_i} \frac{dT}{dz} = k \frac{d^2 T}{dz^2} \quad \rightarrow \rho v_o c_{p_{\text{vapor}}} (T - T_o) = k \frac{dT}{dz} - \dot{q}_o \quad (11.29)$$

donde se ha tenido en cuenta el estado estacionario, la ausencia de efectos viscosos, que el aire está en calma ($\rho v \equiv \sum \rho_i v_i = \rho_{\text{vapor}} v_{\text{vapor}}$), que se ha llamado $v_o = v$ como antes, y que se han introducido las condiciones de contorno térmicas en z_o para la integración primera. Nótese que el c_p que aparece es sólo el del vapor, mientras que la k es la de la mezcla (prácticamente la del aire). Integrando otra vez se llega a:

$$\ln \left[1 + \frac{\rho v_o c_{p_{\text{vapor}}} (T_1 - T_o)}{\dot{q}_o} \right] = \frac{\rho v_o c_{p_{\text{vapor}}}}{k} (z_1 - z_o) \quad \rightarrow \quad q_o = k \frac{T_1 - T_o}{z_1 - z_o} = \rho v_o \Delta h_{lv_o} \quad (11.30)$$

habiendo supuesto que el término entre corchetes es próximo a la unidad (en este caso el perfil de temperaturas será lineal). Como se han supuesto conocidas las condiciones de contorno en concentraciones, se ha determinado v_o con (11.28), y con (11.30) se determinaría el salto de temperaturas. Si se suponen conocidas las condiciones de contorno térmicas, de (11.30) se obtendría v_o y de (11.28) la diferencia de concentración. En ambos casos hay que tener presente el equilibrio en la interfase, dado por la primera relación en (11.27).

Difusión unidimensional esférica

Este problema tiene más aplicaciones prácticas que el anterior, pues sirve para modelizar la evaporación de combustibles en carburadores (motores de gasolina), inyectores en cámara cerrada (motores de gasolina y de gasoil), inyectores en cámara abierta (turbinas de gas, calderas y hornos), así como la evaporación de gotitas de agua (de gran interés en Meteorología) y de otras sustancias de interés en procesos químicos (extinción de fuegos, secado de leche en polvo, etc).

Con las mismas hipótesis del apartado anterior, y la geometría de la Fig. 11.6, las ecuaciones de conservación de la masa y las especies dan:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \Rightarrow v r^2 = cte = v_o r_o^2 \quad (11.31)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \bar{v}_i) = w_i \Rightarrow y_i v_i r^2 = \left(y_i v - D_i \frac{dy}{dr} \right) r^2 = cte = v_o r_o^2 \quad (11.32)$$

que, con ayuda de las condiciones de contorno impuestas:

$$y|_{r=r_o} = y_o = M_{va} \frac{p^*(T)}{p}, \quad y|_{r \rightarrow \infty} = y_\infty \quad (11.33)$$

da lugar a los siguientes resultados:

$$\ln \frac{1-y_o}{1-y_\infty} = \frac{v_o r_o}{D_i} \quad \frac{1-y}{1-y_\infty} = \left(\frac{1-y_o}{1-y_\infty} \right)^{\frac{r_o}{r}} \quad \frac{dr_o}{dt} = -\frac{\rho}{\rho_{liquido}} v_o = \frac{cte}{r_o} \quad (11.34)$$

De esta última expresión se deduce que el área de la gota disminuye linealmente con el tiempo. En el límite $y \ll 1$ (que es válido si las temperaturas no son muy altas), $v_o = D_i(y_o - y_\infty)r_o$, el perfil de concentración decae hiperbólicamente, y el tiempo que tarda en evaporarse toda la gota (Langmuir-1918⁴) es:

$$t_{evap} = \frac{1}{2D_i(y_o - y_\infty)} \frac{\rho_{liquido}}{\rho} r_o^2 \quad (11.35)$$

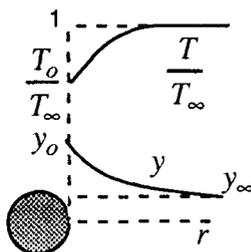


Fig. 11.6. Perfil de concentración de vapor de líquido en la evaporación estacionaria de una gota en aire en calma ('y' es la fracción másica).

4. Langmuir, I., Phys. Rev. 12, p 368, 1918.

Para el balance energético se procede como en (11.29), obteniéndose:

$$\rho v c_{p_{vapor}} \frac{dT}{dr} = k \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) \rightarrow \rho v_o r_o^2 c_{p_{vapor}} (T - T_o) = k r^2 \frac{dT}{dz} - r_o^2 \dot{q}_o \quad (11.36)$$

donde se ha tenido en cuenta que $vr^2 = cte$. Integrando otra vez, se obtiene:

$$\ln \left[1 + \frac{\rho v_o c_{p_{vapor}} (T_\infty - T_o)}{\dot{q}_o} \right] = \frac{\rho v_o c_{p_{vapor}}}{k} r_o \rightarrow \dot{q}_o = k \frac{T_\infty - T_o}{r_o} \quad (11.37)$$

habiendo hecho la misma linealización que en (11.30), aunque en este caso el perfil de temperaturas a que da lugar ya no varía linealmente sino hiperbólicamente con el radio. Como se ha supuesto conocidas las condiciones de contorno en concentraciones, se ha determinado v_o con (11.34), y con (11.37) se determinaría el salto de temperaturas. Si se suponen conocidas las condiciones de contorno térmicas, de (11.37) se obtendría v_o y de (11.34) la diferencia de concentración. En ambos casos hay que tener presente el equilibrio en la interfase, dado por la primera relación en (11.27). El tiempo que tarda la gota en evaporarse totalmente viene dado por (11.35), aunque puede ponerse en función del salto de temperaturas en lugar del de concentraciones. Si no es apropiada la linealización asumida en (11.35), p.e. porque las temperaturas son altas, puede usarse:

$$t_{evap} = \frac{\frac{\rho_{liquido} r_o^2}{\rho}}{2D_i \ln \left(1 + \frac{y_\infty - y_o}{1 - y_o} \right)} = \frac{\frac{\rho_{liquido} r_o^2}{\rho}}{2 \frac{k}{\rho c_{p_{vapor}}} \ln \left[1 + \frac{c_{p_{vapor}} (T_\infty - T_o)}{h_{lv}} \right]} \quad (11.38)$$

En la Fig. 11.7 se representa la temperatura que alcanza el líquido en una gota de agua en presencia de una atmósfera de aire, y el tiempo que tarda en evaporarse hasta la mitad del radio, en función de la humedad relativa ambiente.

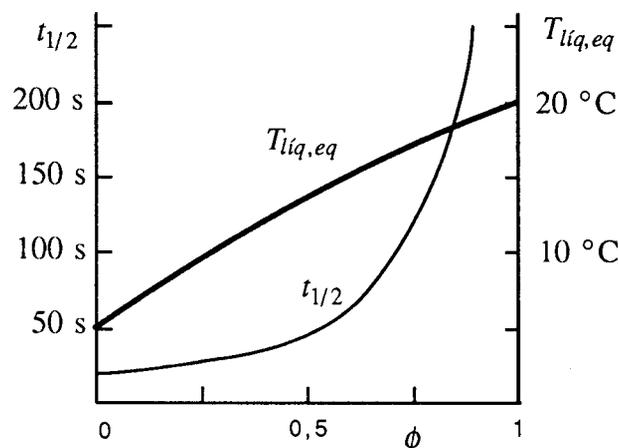


Fig. 11.7. Evaporación por difusión de una gota de agua pura de 0,1 mm de radio en aire en calma a 20 °C. La temperatura del líquido en el equilibrio de enfriamiento por evaporación $T_{liq,eq}$ es independiente del radio, y el tiempo que tarda en disminuir el tamaño a la mitad $t_{1/2}$ es proporcional al cuadrado del radio (p.e. para un radio de 1 mm, con $\phi=0$, el tiempo pasa a ser de 5000 s).

RECAPITULACION

1. Se presentan los tres mecanismos clásicos de transmisión de calor: conducción, convección y radiación y las leyes básicas que los rigen: ley de Fourier, ley de Newton y ley de Stefan-Boltzmann.
2. Con ayuda del balance energético y la ley de Fourier se deduce la ecuación del calor, $\partial T/\partial t = a \nabla^2 T$, analizando en detalle sus diferentes condiciones de contorno.
3. Se estudian los problemas elementales de conducción unidimensional y estacionaria en pared plana, cilíndrica y esférica, y en particular el fenómeno del radio crítico de aislamiento.
4. Se presentan algunos problemas elementales de conducción unidimensional no estacionaria (excitación periódica y en escalón), de tanta importancia práctica (y para la metrología térmica).
5. Se da una descripción general de los métodos numéricos que en la realidad se usan para resolver todos los problemas prácticos de conducción.
6. Se analiza el problema de la difusión de especies en una mezcla con gradientes de concentración, y se ve que es matemáticamente semejante al de la conducción de calor.
7. Se resuelven dos problemas sencillos de transferencia de masa: la difusión unidimensional plana y la esférica.

PROBLEMAS

- 11.1. Determinar el flujo de calor y el perfil de temperatura en una pared plana compuesta de 10 cm de ladrillo de $k=0,5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ y 1 cm de chapa de hierro de $k=50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, sabiendo que las temperaturas extremas son de 1200 K en el lado del ladrillo y de 300 K en el otro lado.
Sol.: $\dot{q}=45 \text{ kW}/\text{m}^2$, $T=309 \text{ K}$.
- 11.2. Determinar el flujo de calor y el perfil de temperatura en una pared plana compuesta que representa el suelo de una bodega de un buque frigorífico de 5 mm de hierro de espesor del casco, 10 mm de cámara de aire, 20 mm de espesor de madera, 30 mm de espesor de corcho y 1 mm de pared de cinc, sabiendo que el agua está a $10 \text{ }^\circ\text{C}$ y la bodega a $-20 \text{ }^\circ\text{C}$.
Sol.: $\dot{q}=26,5 \text{ kW}/\text{m}^2$, las temperaturas en las interfases son 10; 10; -6; -9,5 y $-20 \text{ }^\circ\text{C}$.
- 11.3. Una varilla cilíndrica de 1 cm de diámetro está rodeada de un baño térmico a $130 \text{ }^\circ\text{C}$. El material de la varilla, de $k=0,5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, está sufriendo un proceso reactivo que libera $10 \text{ W}/\text{cm}^3$. Determinar el perfil de temperatura.
Sol.: $\dot{q}=50 \text{ kW}/\text{m}^2$, perfil parabólico con el máximo $T_o=255 \text{ }^\circ\text{C}$ en el centro.

11.4. Para mover un eje a 1000 rpm en un cojinete de fricción, de bronce, de 60 mm de agujero, 100 mm de diámetro exterior y 500 mm de ancho, se necesita un par de 10 N.m para vencer el rozamiento. Calcular la potencia consumida y el perfil de temperatura en función de la temperatura exterior.

Sol.: $\dot{q}=1,77 \text{ kW/m}^2$, $\Delta T=-0,9 \text{ }^\circ\text{C}$.

11.5. Una aleta rectangular de aluminio tiene 5 mm de espesor, 50 mm de longitud y 100 mm de anchura. La temperatura en la raíz es de $130 \text{ }^\circ\text{C}$ y el coeficiente de convección con el aire atmosférico es $h=50 \text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$. Determinar el perfil de temperatura, el flujo de calor y el rendimiento de aleta.

Sol.: $\dot{Q}=56 \text{ W}$, $\eta=0,92$.

11.6. Se trata de calcular el perfil de temperatura en una varilla de aluminio de 30 cm de longitud y 3 mm de diámetro, uno de cuyos extremos está en contacto con aceite hirviendo a $200 \text{ }^\circ\text{C}$, en una atmósfera a $20 \text{ }^\circ\text{C}$ con la cual se estima que el coeficiente de convección térmica es de $15 \text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$. Se pide:

- Establecer el balance energético de un trozo de varilla.
- Determinar analíticamente el perfil de temperatura y el flujo total de calor.
- Calcular la temperatura en el otro extremo y el flujo total de calor.
- Generación de entropía

Sol.: $d^2T/dx^2-(hp/kA)(T-T_\infty)=0$; b) $(T-T_\infty)/(T_o-T_\infty)=\cosh mx-\tanh mL \cdot \sinh mx$, $\dot{Q}=kA(T_o-T_\infty) \cdot m \cdot \tanh mL$, con $m^2=(hp)/(kA)$; c) $T_L=38 \text{ }^\circ\text{C}$, $\dot{Q}=2,5 \text{ W}$.

11.7. Para estudiar la influencia de la vestimenta sobre la transmisión de calor del cuerpo humano se propone el siguiente ejercicio. Determinar la masa de aislante necesario para mantener un cilindro vertical de 1,7 m de altura y 30 cm de diámetro a $20 \text{ }^\circ\text{C}$ por encima de la temperatura ambiente, sabiendo que debe disipar 100 W, para los casos de lana ($k=0,05 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$, $\rho=100 \text{ kg.m}^{-3}$) como modelo del pelo, y cuero ($k=0,15 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$, $\rho=1000 \text{ kg.m}^{-3}$) como modelo de la piel. Supóngase que la transmisión de calor en el aire puede variar desde $5 \text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$ hasta $100 \text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$ si hay viento.

Sol.: Para $h=5$, $e_{\text{cuero}}=18 \text{ mm}$, $m_{\text{cuero}}=29 \text{ kg}$, $e_{\text{lana}}=6 \text{ mm}$, $m_{\text{lana}}=1 \text{ kg}$; para $h=100$, $e_{\text{cuero}}=48 \text{ mm}$, $m_{\text{cuero}}=77 \text{ kg}$, $e_{\text{lana}}=16 \text{ mm}$, $m_{\text{lana}}=2,5 \text{ kg}$.

11.8. La pared de un horno de tratamientos térmicos tiene una conductividad térmica $k=0,7 \text{ W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$, una densidad $\rho=1200 \text{ kg.m}^{-3}$, una capacidad térmica $c=1130 \text{ J.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$ y 20 cm de espesor. Para un cierto proceso se necesita que la temperatura interior varíe cíclicamente entre $100 \text{ }^\circ\text{C}$ y $750 \text{ }^\circ\text{C}$ cada 3 horas. Se pide:

- Modelización del problema.
- Amplitud de la variación de temperatura en la cara externa.
- Retraso de la onda térmica.

Sol.: a) se supone proceso periódico (cada 6 horas) y variación sinusoidal, y pared térmicamente gruesa, despreciando la influencia externa;

$$\text{b) } \Delta T = \Delta T_o \exp\left[-x / \sqrt{\frac{a\tau}{\pi}}\right] = 22 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$c) \Delta t = x / \sqrt{\frac{4\pi a}{\tau}} = 3,25 \text{ h.}$$

11.9. Por un hilo de acero de resistividad eléctrica $7 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$ y 1 mm de diámetro se hace pasar una corriente eléctrica de 2 A. El hilo está forrado de un aislante de 1 mm de espesor y $k=1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, y la convección con el aire atmosférico es de $h=5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Se pide:

- Generación de calor por unidad de volumen.
- Flujo radial de calor.
- Perfil de temperaturas.

Sol.: a) $\dot{q}=4,6 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$; b) $\dot{Q}/L=3,6 \text{ W/m}$; c) $T_{int}=365 \text{ K}$, $T_{ext}=364,4 \text{ K}$.

11.10. Se trata de dimensionar el aislamiento de un tanque de almacenamiento de gas natural licuado (GNL, $\rho_{GNL}=500 \text{ kg/m}^3$) de 20 000 toneladas de capacidad, a presión atmosférica, para que la vaporización por transmisión de calor desde el ambiente no supere el 0,04% por día. Para minimizar estas pérdidas se va a adoptar una forma cilíndrica de área mínima (de radio $R=(V/2\pi)^{1/3}$, siendo V el volumen, que ha de ser un 20% mayor que el ocupado por el GNL).

El aislante de la base es principalmente (aparte del soporte estructural) lana de vidrio de $k=0,04 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ y 70 cm de espesor, y el de las paredes y el techo es perlita de $k=0,03 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Se pide:

- Diferencia de temperatura entre el exterior y el interior.
- Máximo flujo de calor admisible.
- Flujo de calor por el suelo.
- Espesor requerido de aislante en paredes y techo.
- Repetir c) añadiendo el efecto de la vasija donde está realmente contenido el GNL, que es un vaso abierto de 50 cm de espesor de hormigón.
- Repetir d) con el efecto del hormigón.

Sol.: a) $T_{GNL}=112 \text{ K}$, $T_{amb}=288 \text{ K}$; b) $\dot{Q}=51,4 \text{ kW}$; c) $\dot{Q}_{suelo}=12,3 \text{ kW}$; d) $e=0,82 \text{ m}$; e) $\dot{Q}_{suelo}=12,1 \text{ kW}$; f) $e=0,82 \text{ m}$.

11.11. Una pared de hormigón de 0,5 m de espesor está en una atmósfera a 300 K y a partir de un cierto instante empieza a recibir una irradiación de 500 W/m^2 que absorbe en su totalidad. Se pide:

- Perfil de temperatura estacionario suponiendo que las pérdidas son por convección con $h=10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.
- Perfil de temperatura estacionario suponiendo que las pérdidas son por convección con $h=10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ y por radiación como cuerpo negro.
- Evolución del perfil de temperatura en régimen transitorio.

Sol.: a) $T_1=306,4 \text{ K}$, $T_2=343,2 \text{ K}$; b) $T_1=305,4 \text{ K}$, $T_2=339,0 \text{ K}$.

11.12. Considérese una fuente volumétrica de energía de intensidad $\phi = \phi_o \exp[\beta(T - T_o)]$ por unidad de volumen. Determinar bajo qué condiciones se alcanzaría un régimen estacionario cuando el contorno está a T_o en los casos siguientes:

- Pared plana de espesor L y conductividad k .
- Cilindro de radio R y conductividad k .

c) Esfera de radio R y conductividad k .

Sol.: a) $\phi_0 \beta L^2/k=0,88$; b) $\phi_0 \beta R^2/k=2$; c) $\phi_0 \beta R^2/k=3,32$.

11.13. El núcleo de un reactor nuclear consta de varillas cilíndricas de óxido de uranio de conductividad térmica $k=2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ y 1 cm de diámetro, que liberan 10^8 W.m^{-3} de energía nuclear, encapsuladas en una vaina cerámica de 2 mm de espesor y $k=20 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. El coeficiente de convección forzada con el agua es de $5 \text{ kW.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Determinar el perfil radial de temperatura en la varilla.

Sol.: $\Delta T_{01}=312 \text{ K}$, $\Delta T_{12}=21 \text{ K}$, $\Delta T_{12}=36 \text{ K}$.

11.14. Se trata del estudio del perfil de temperatura en régimen periódico en un estanque de agua en reposo, en contacto con una atmósfera gaseosa cuya temperatura varía según la ley $T_\infty=T_m+\Delta T \text{sen}(2\pi t/\tau)$, con $T_m=5 \text{ }^\circ\text{C}$ y un coeficiente de convección $h=10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$, en función de ΔT y τ . En particular, se desea conocer el ΔT mínimo para la formación de hielo en los casos $\tau=1$ hora, $\tau=1$ día y $\tau=1$ mes.

Sol.: $\Delta T_{\text{hora}}=37 \text{ }^\circ\text{C}$, $\Delta T_{\text{día}}=11 \text{ }^\circ\text{C}$, $\Delta T_{\text{mes}}=6 \text{ }^\circ\text{C}$.

11.15. El modelo de transmisión de calor para el calentamiento de agua en una olla de aluminio sobre una placa de hierro (cocina) expuesta a la llama de un hogar es el siguiente. Se supone flujo unidimensional (vertical); la parte inferior del hierro se supone a $600 \text{ }^\circ\text{C}$, el espesor de hierro es de 5 mm y su conductividad $k=50 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$; debido al mal contacto físico entre la placa y la olla, se supone que existe una capa de $50 \mu\text{m}$ de aire ($k=0,02 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$) entre ellas; el espesor de aluminio de la olla es de 2 mm y su conductividad $k=200 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$; el coeficiente de convección térmica con el agua, que está en ebullición con una temperatura lejos del fondo de $100 \text{ }^\circ\text{C}$, se supone que es de $4000 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Se pide:

- Esquema del perfil de temperatura.
- Cálculo del flujo unitario de calor.
- Cálculo de las temperaturas intermedias.
- Corrección correspondiente a tomar una dependencia de la forma $k/T^{1/2}=\text{cte}$ para la conductividad del aire.

Sol.: b) $\dot{q}=175 \text{ kW/m}^2$; c) $T_1=582,5 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_2=145,5 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_3=143,7 \text{ }^\circ\text{C}$; d) $k_{\text{aire}}(20 \text{ }^\circ\text{C})=0,02 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $k_{\text{aire}}(T_1)=0,034 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, $k_{\text{aire}}(T_2)=0,024 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, por lo que se puede tomar un valor medio de $0,029 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ y volver a resolver, obteniéndose $\dot{q}=234 \text{ kW/m}^2$, $T_1=576 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_2=162 \text{ }^\circ\text{C}$, y $T_3=160 \text{ }^\circ\text{C}$, o bien resolver el problema con k variable:

$$\frac{\dot{Q}}{A} = \frac{600 - T_1}{\frac{0,005}{50}} = \frac{T_1^{3/2} - T_2^{3/2}}{\frac{3}{2} \frac{0,00005}{0,02} \sqrt{293}} = \frac{T_2 - T_3}{\frac{0,002}{200}} = \frac{T_3 - 100}{\frac{1}{4000}}$$

11.16. Se trata de analizar el régimen estacionario de una instalación de agua caliente sanitaria que consta de un calentador, donde la corriente de agua recibe 20 kW, y de una tubería de 1 cm de diámetro y 10 m de longitud cuya transmitancia térmica global con el ambiente se supone que es $U = 200 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ referido al área del tubo. Se pide:

- a) Temperatura de salida del calentador, T_1 (en función del gasto másico de agua).
 b) Perfil de temperatura a lo largo del conducto.
 c) Temperatura de salida del conducto, T_2 .
 d) Gasto másico que daría máxima temperatura de salida del conducto y valor de ésta.
 e) Comentar la viabilidad y conveniencia del punto de trabajo anterior.

Sol.: a) $T_1 = T_o + \dot{Q} / (\dot{m}c_p) = 288 + 20000/(\dot{m} \cdot 4200)$, con \dot{m} en kg/s y T en K [ver Fig. P-11.16]; b) $T(x) = T_o + [\dot{Q} / (\dot{m}c_p)] \exp[-h\pi Dx / (\dot{m}c_p)]$; c) $T_2 = T_o + [\dot{Q} / (\dot{m}c_p)] \exp[-h\pi DL / (\dot{m}c_p)]$ [ver Fig. P-11.16]; d) $\dot{m}|_{T_2, \text{máx}} = h\pi DL / c_p = 200 \cdot \pi \cdot 0,01 \cdot 10 / 4200 = 0,015$ kg/s, $T_{2, \text{máx}} = T_o + \dot{Q} / (h\pi DL e) = 288 + 20000 / (200 \cdot \pi \cdot 0,01 \cdot 10 \cdot e) = 405$ K; e) Como la presión de suministro doméstico es del orden de 0,3 MPa, la T_1 habrá de ser menor de $T_{\text{sat}} = 410$ K y la T_2 correspondiente será menor de 370 K, aunque realmente no se necesitará que sea mayor de unos 330 K y sí se deseará más caudal, así que el punto de trabajo puede ser el $T_2 = 330$ K y $\dot{m} = 0,09$ kg/s (5,5 litros por minuto de agua a 57 °C).

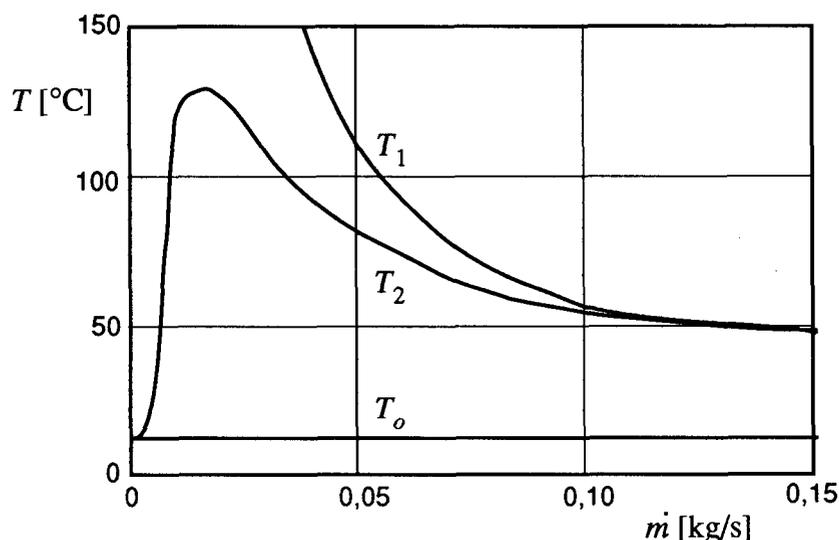


Fig. P-11.16

- 11.17. Estimar el tiempo que tardaría en evaporarse 1 cm de alcohol etílico en el fondo de un tubo de ensayo de 1 cm de diámetro y 10 cm de altura. Datos: $D_i = 10^{-5}$ m²/s, $p_{\text{vapor}} = 10$ kPa, $\rho_{\text{líqu}} = 790$ kg/m³.

Sol.: $t = 36$ horas.

- 11.18. En un cilindro vertical cerrado por ambos extremos y con una válvula intermedia (célula de Loschmidt), se ha dispuesto un gas ligero en la mitad superior y uno más pesado en la mitad inferior. Determinar la evolución del perfil de concentraciones al abrir la válvula que separa ambos gases.

Sol.: $y_\infty = \text{sen}(\pi x / L)$, siendo $x=0$ el punto medio y L la longitud total del tubo.